

Feine Topologie am Martinrand eines Standardprozesses

von

Hans Föllmer

aus Heiligenstadt/Thüringen

1960



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Feine Topologie am Martinrand eines Standardprozesses

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Hans Föllmer

aus Heiligenstadt/Thüringen

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 14.2.1968

Dekan: Universitätsprofessor Dr.W.Haupt
Erstberichterstatter: Universitätsprofessor Dr.K.Jacobs
Zweitberichterstatter: Universitätsprofessor Dr.H.Bauer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seite

I. Vorbereitungen

§ 1. Prozess und Coprozess	1
§ 2. Martinrand und Integraldarstellung	10
§ 3. h-Prozesse	15
§ 4. Feine Topologien	18

II. Naim-Topologie

§ 1. Ein Approximationssatz für die Reduzierte einer harmonischen Funktion	21
§ 2. η -Filter	25

III. Feine Topologie

§ 1. K-Potentiale	30
§ 2. Die feinen Umgebungen minimaler Randpunkte	32
§ 3. Der feine Rand von E	36

IV. Grenzverhalten h-exzessiver Funktionen

§ 1. h-exzessive und h-harmonische Funktionen	39
§ 2. Konvergenz entlang h-Pfaden	45
§ 3. Feine Konvergenz	55
§ 4. Konvergenz in der Martintopologie	61

Literaturverzeichnis

EINLEITUNG

Sei X ein Standardprozess mit Zustandsraum E und Coprozess $\hat{X}$. Solche Prozesse wurden systematisch zuerst von G.A.Hunt in [13] untersucht. Ihre Theorie umfaßt die klassische Potentialtheorie, die Potentialtheorie von M.Riesz und die Theorie der Wärmegleichung als Spezialfälle.

In der klassischen Potentialtheorie ist E ein Greenscher Raum (etwa ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$) und $X = \hat{X}$ der Brownprozess auf E . In dieser Situation haben M.Brelot, L.Naim und J.L.Doob die Theorie der feinen Topologie am Martinrand entwickelt. Insbesondere hat Doob in [7] den folgenden Fatousatz bewiesen:

- (1) Ist u exzessiv, $h > 0$ harmonisch und μ_h das Maß aus der Martinschen Integraldarstellung von h , so hat $\frac{u}{h}$ in μ_h -fastallen Punkten des Martinrandes einen feinen Limes.

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß die wesentlichen Aussagen aus der klassischen Theorie der feinen Topologie am Martinrand auch für den allgemeinen Standardprozess X gelten (unter der Hypothese (B) aus [15], die schwächer ist als Hunt's Hypothese (F)). Insbesondere wird ein allgemeiner Fatousatz bewiesen.

In Kapitel I beschreiben wir die Ausgangssituation. H.Kunita und T.Watanabe haben in [15] den Martinrand E' von X konstruiert und die Martinsche Integraldarstellung der r -integrablen exzessiven Funktionen hergeleitet; dabei ist r ein festes Bezugsmaß auf E . (In [10] werden diese Ergebnisse durch Anwendung der Sätze von Choquet über die Integraldarstellung in schwach vollständigen Kegeln gewonnen.) Bezeichnet

$\underline{S}$ die Menge der exzessiven Funktionen von X , so gibt es also zu jedem $u \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$ genau ein Maß μ_u auf $E \cup E'_1$ mit

$$u(x) = \int K(x, \eta) \mu_u(d\eta) \quad (x \in E).$$

Dabei ist E'_1 der "minimale Teil" des Martinrandes, und die Funktionen $K(., \eta)$ ($\eta \in E \cup E'_1$) sind die Extrempunkte der Menge $\{u \in \underline{S} \mid \int u dr \leq 1\}$. u ist genau dann harmonisch, wenn μ_u auf E'_1 konzentriert ist. Ferner gibt es zu u einen Standardprozess X_u auf E , dessen Grenzverteilung das Maß μ_u bestimmt.

In Kapitel II setzen wir die von X auf E induzierte "Prozess-Topologie" zu einer Topologie $\underline{T}_N$ auf $E \cup E'_1$ fort. Die E -Schnitte der $\underline{T}_N$ -Umgebungen von $\eta \in E'_1$ sind die Komplemente der η -dünnen Mengen. Dabei heißt eine Teilmenge von E η -dünn, wenn sie der zu $K(., \eta)$ gehörige Standardprozess X_η nicht mit Sicherheit trifft. Im klassischen Fall ist das gerade die Kennzeichnung des "effilement" von Naim in [18] bzw. deren Interpretation durch Doob in [7]. Wir werden benötigen, daß es zu jeder η -dünnen Menge eine η -dünne offene Obermenge gibt; dazu verschärfen wir in II.1 den Huntschen Approximationssatz für die Reduzierte einer exzessiven Funktion u im Fall, daß u harmonisch und r -integrabel ist.

In Kapitel III setzen wir die von $\hat{X}$ auf E induzierte "Coprozess-Topologie" zu einer Topologie $\underline{T}_K$ auf $E \cup E'$ fort, in der der minimale Teil des Martinrandes gerade der Rand von E ist. Dazu benutzen wir die von Naim in [18] eingeführten "K-Potentiale" $\int \mu(dx) K(x, .)$. $\underline{T}_K$ ist die zugehörige "feine Topologie" im Sinne von Brelot, also die gröbste Verfeinerung der Martintopologie, in der die K-Potentiale stetig sind. Im klassischen Fall stimmt $\underline{T}_K$ auf

$E \in E'$ mit $\underline{T}_N$ überein. Das ist z.B. bei der Wärme Gleichung nicht der Fall. Wir werden aber zeigen, daß $\underline{T}_K$ und $\underline{T}_N$ stets am Martinrand übereinstimmen.

In Kapitel IV legen wir eine harmonische Funktion $h \in \underline{L}(r)$ zugrunde; dies garantiert, daß die Pfade des zugehörigen Standardprozesses X_n zum Martinrand führen. In §1 charakterisieren wir zunächst die h -exzessiven Funktionen, also diejenigen Funktionen auf E , die exzessiv sind in bezug auf X_n . In §2 verfahren wir wie Doob in [7] und beweisen einen Satz über die Konvergenz entlang Pfaden, der zu jeder h -exzessiven Funktion eine Grenzfunktion auf dem Martinrand liefert. In §3 wenden wir die Ergebnisse aus II und III an und interpretieren die Konvergenz entlang Pfaden als Konvergenz in der feinen Topologie in μ_n -fast allen Randpunkten. Damit erhalten wir einen allgemeinen Fatousatz vom Typ (1). In §4 beweisen wir zwei Eigenschaften der feinen Topologie $\underline{T}_K$, die es insbesondere erlauben, "feine Konvergenz in $\eta \in E'_1$ " durch "Konvergenz in η bezüglich der Martintopologie außerhalb einer passenden η -dünnen Menge" zu ersetzen. Das ergibt eine direkte Verallgemeinerung des Satzes von P.Fatou in [9] über die harmonischen Funktionen auf dem Einheitskreis.

Im Frühjahr 1966 habe ich eine Vorlesung von M.Brelot über "Topologies et frontières en théorie du potentiel" gehört; diese Vorlesung gab den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit. Eine Vorlesung von R.M.Blumenthal über Markoffsche Prozesse im Wintersemester 1966/67 in Erlangen hat mir bei einigen technischen Fragen sehr geholfen.

Herrn Professor Konrad Jacobs danke ich sehr herzlich für seine Förderung während der letzten Jahre. Diese Arbeit ist Teil eines Forschungsprogrammes unter seiner Leitung, das aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert wird.

Zur Schreibweise

Ist $(M, \underline{M})$ ein Meßbarkeitsbereich, P ein Maß auf $\underline{M}$ und $f: M \rightarrow \langle -\infty, \infty \rangle$ eine Funktion auf M , so schreiben wir

auch	statt
$f \in \underline{M}$	f ist $\underline{M}$ -meßbar
$f \in b\underline{M}$	f ist $\underline{M}$ -meßbar und beschränkt
$f \in \underline{M}_+$	f ist $\underline{M}$ -meßbar, $f \geq 0$
$Ef, E(f)$	$\int f \, dP$
$E(f; A)$	$\int 1_A f \, dP$

(1_A bezeichnet die charakteristische Funktion von $A \in \underline{M}$).

Ist $\mathcal{A}$ eine Aussage über Elemente von M und $A \subseteq M$, so be-
deute " $\mathcal{A}(P, A)$ ", daß $\mathcal{A}$ für alle Elemente von A außer-
halb einer P -Nullmenge gilt. Statt " (P, M) " schreiben wir
kurz " (P) ".

Ist für jedes i aus einer Indexmenge I eine Abbildung φ_i
von M in einen Meßbarkeitsbereich $(N, \underline{N})$ gegeben, so bezeichnen
wir mit $\sigma(\varphi_i \mid i \in I)$ den von den φ_i erzeugten σ -Körper
auf M .

Ist $\underline{F}$ irgendein System von Teilmengen der Menge M und $A \subseteq M$,
so setzen wir $\underline{F} \cap A := \{ F \cap A \mid F \in \underline{F} \}$.

I. VORBEREITUNGEN

§ 1 . Prozess und Coprozess

Sei E ein lokalkompakter, nicht kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbar erzeugter Topologie, $E_{\Delta} := E \cup \{\Delta\}$ eine Alexandroff-Kompaktifizierung von E . Jede Funktion f auf E interpretieren wir zugleich als Funktion auf E mit $f(\Delta) = 0$. Mit $\underline{C}_0$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger. $\underline{E}$ sei der Borelsche σ -Körper auf E , $\underline{E}^*$ seine universelle Vervollständigung:

$$\underline{E}^* := \bigcap_{\mu} \underline{E}^{\mu}$$

wobei der Durchschnitt über den endlichen Maßen μ auf $\underline{E}$ gebildet wird und $\underline{E}^{\mu}$ die μ -Vervollständigung von $\underline{E}$ bezeichnet.

Zu einer Abbildung $\omega : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow E_{\Delta}$ mit $\omega(\infty) = \Delta$ definieren wir

$$x_t(\omega) := x(t, \omega) := \omega(t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

$$\zeta(\omega) := \inf \{t \mid x_t(\omega) = \Delta\} \quad .$$

Sei Ω die Menge aller rechtsstetigen Abbildungen $\omega : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow E_{\Delta}$ mit $\omega(\infty) = \Delta$, die für jedes $t \in (0, \zeta(\omega))$ einen linksseitigen Limes

$$x_{t-}(\omega) := \lim_{s \uparrow t} x_s(\omega) \in E$$

haben und der Bedingung

$$x_t(\omega) = \Delta \quad (t \geq \xi(\omega))$$

genügen. Ist T eine Abbildung von Ω nach $\langle 0, \infty \rangle$, so bezeichnen wir mit

$$\Theta_T : \omega \mapsto [\omega \Theta_T : s \mapsto \omega(T(\omega) + s) \quad (0 \leq s < \infty)]$$

die zugehörige shift-Transformation auf Ω ; ist $T(\omega) = t$ ($\omega \in \Omega$), so schreiben wir " Θ_t " statt " Θ_T ".

Durch

$$\mathbb{F}^0 := \mathcal{C}(x_s \mid 0 \leq s < \infty)$$

$$\mathbb{F}_t^0 := \mathcal{C}(x_s \mid 0 \leq s \leq t)$$

$$\mathbb{F}_{t+}^0 := \bigcap_{s > t} \mathbb{F}_s^0 \quad (0 \leq t < \infty)$$

sind $\mathcal{C}$ -Körper auf Ω erklärt. Stopzeiten für das System $(\mathbb{F}_{t+}^0)_{0 \leq t < \infty}$, also Abbildungen $T : \Omega \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ mit

$$\{T \leq t\} \in \mathbb{F}_{t+}^0 \quad (0 \leq t < \infty),$$

nennen wir kurz $(\mathbb{F}_{t+}^0)$ -Stopzeiten. Ist T eine $(\mathbb{F}_{t+}^0)$ -Stopzeit, so ist

$$\mathbb{F}_{T+}^0 := \{ \bigwedge \in \mathbb{F}^0 \mid \bigwedge \cap \{T \leq t\} \in \mathbb{F}_{t+}^0 \quad (0 \leq t < \infty) \}$$

ein $\mathcal{C}$ -Körper auf Ω .

Sei nun zu jedem $x \in E$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P^x auf $\underline{\mathbb{F}}^0$ gegeben, und sei das System

$$X := (\Omega, \underline{\mathbb{F}}^0, \underline{\mathbb{F}}_{t+}^0, x_t, P^x)$$

ein Standardprozess, d.h. es gelte

$$1) \quad P^{(\cdot)}(\Lambda) \in \underline{\mathbb{E}} \quad (\Lambda \in \underline{\mathbb{F}}^0)$$

$$2) \quad P^x(x_0 = x) = 1 \quad (x \in E)$$

$$3) \quad \text{Ist } x \in E, \varphi \in b\underline{\mathbb{F}}^0 \text{ und } T \text{ eine } (\underline{\mathbb{F}}_{t+}^0)\text{-Stopzeit, so gilt}$$

$$E^x(\varphi \theta_T; \Lambda) = E^x(E^{x(T(\cdot), \cdot)} \varphi; \Lambda) \quad (\Lambda \in \underline{\mathbb{F}}_{T+}^0)$$

$$4) \quad \text{Ist } T_n \text{ eine } (\underline{\mathbb{F}}_{t+}^0)\text{-Stopzeit, } T_n \leq T_{n+1} \text{ (n=1,2,..) und } T := \sup T_n, \text{ so gilt f\u00fcr jedes } x \in E$$

$$x_{T_n} \rightarrow x_T \quad (P^x, \{T < \zeta\})$$

Statt " (P^x) f\u00fcr jedes $x \in E$ " schreiben wir auch "fast sicher" oder "f.s." .

F\u00fcr $A \subseteq E$ setzen wir

$$D_A(\omega) := \inf \{t \geq 0 \mid x_t(\omega) \in A\}$$

$$T_A(\omega) := \inf \{t > 0 \mid x_t(\omega) \in A\} \quad (\omega \in \Omega) .$$

Ist A offen, so ist $D_A = T_A$, und D_A ist eine $(\underline{\mathbb{F}}_{t+}^0)$ -Stopzeit. Ist $A \in \underline{\mathbb{E}}$, so sind D_A und T_A jedenfalls Stopzeiten für das System

$$\underline{\mathbb{F}}_t := \bigcap_{\mu} \mathcal{G}(\underline{\mathbb{F}}_t^0, P^\mu) \quad (0 \leq t < \infty) ;$$

dabei durchläuft μ die endlichen Maße auf $\underline{\mathbb{E}}$, P^μ bezeichnet das durch $P^\mu(\cdot) := \int P^x(\cdot) \mu(dx)$ definierte Maß auf $\underline{\mathbb{F}}^0$, und $\mathcal{G}(\underline{\mathbb{F}}_t^0, P^\mu)$ bezeichnet den kleinsten $\mathcal{G}$ -Körper auf Ω , der $\underline{\mathbb{F}}_t^0$ und die P^μ -Nullmengen aus $\underline{\mathbb{F}}^0$ enthält. Das System $(\underline{\mathbb{F}}_t)$ ist rechtsstetig:

$$\underline{\mathbb{F}}_t = \underline{\mathbb{F}}_{t+} := \bigcap_{s>t} \underline{\mathbb{F}}_s \quad (0 \leq t < \infty) .$$

Mit $(\underline{\mathbb{F}}_0^0)^{P^\mu}$ bezeichnen wir die P^μ -Vervollständigung von $\underline{\mathbb{F}}_0^0$ und setzen

$$\underline{\mathbb{F}} := \bigcap_{\mu} (\underline{\mathbb{F}}_0^0)^{P^\mu} .$$

Stopzeiten für das System $(\underline{\mathbb{F}}_t)_{0 \leq t < \infty}$ nennen wir $(\underline{\mathbb{F}}_t)$ -Stopzeiten. Ist T eine $(\underline{\mathbb{F}}_t)$ -Stopzeit, so setzen wir

$$\underline{\mathbb{F}}_T := \{ A \in \underline{\mathbb{F}} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \underline{\mathbb{F}}_t \quad (0 \leq t < \infty) \} .$$

Die Aussagen 3) und 4) bleiben dann nach [20] sinnvoll und richtig, wenn man überall die Indices 0 und $^+$ streicht. Insbesondere kann man sie also auf die Eintrittszeiten D_A und T_A in Mengen $A \in \underline{\mathbb{E}}$ anwenden.

Zu X definieren wir die Prozess-Topologie $\underline{T}_0$:

$$A \in \underline{T}_0 : \Leftrightarrow A \subseteq E, \text{ zu jedem } x \in A \text{ gibt} \\ \text{es ein } B \in \underline{E} \text{ mit } x \in B \subseteq A \text{ und}$$

$$P^X(T_{E-B} > 0) = 1$$

$\underline{T}_0$ ist eine Topologie auf E , die feiner ist als die auf E vorgegebene. (Man nennt $\underline{T}_0$ oft auch "feine Topologie"; wir wollen aber in dieser Arbeit "fein" nur im Sinne von M. Brelot verwenden (vgl. §4).)

Ist T eine $(\underline{F}_t)$ -Stopzeit, so ist durch

$$P_T f(x) := E^X(f(x_T) ; T < \zeta) \\ = E^X f(x_T) \quad (x \in E, f \in bE^*)$$

(wir erinnern an die Vereinbarung $f(\Delta) := 0$) ein Kern P_T auf E erklärt. Ist $T \equiv t$, so schreiben wir " P_t " statt " P_T ". Ist $A \in \underline{E}$, so schreiben wir " P_A " statt " P_{T_A} " und " $\bar{P}_A$ " statt " P_{D_A} ".

Zu $\alpha \geq 0$ ist durch

$$U^\alpha f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt \quad (x \in E, f \in bE^*)$$

ein Kern U^α auf E gegeben. Das System $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$ heißt Resolvente des Prozesses X . Statt " U^0 " schreiben wir " U ".

Eine Funktion $u \in \underline{E}_+^*$ heißt exzessiv, wenn sie eine der drei folgenden (untereinander äquivalenten) Bedingungen erfüllt:

- 1) $P_t u \uparrow u \quad (t \downarrow 0)$
- 2) $\alpha U^\alpha u \uparrow u \quad (\alpha \uparrow \infty)$
- 3) Ist (T_n) eine Folge von $(\underline{F}_t)$ -Stopzeiten mit $T_n \downarrow 0$ (f.s.), so gilt $P_{T_n} u \uparrow u$

Gilt nur $\alpha U^\alpha u \leq u$ ($\alpha > 0$), so heißt u quasiexzessiv; in diesem Fall gilt $\alpha U^\alpha u \leq \beta U^\beta u$ ($\alpha \leq \beta$), und durch

$$\text{reg. } u := \lim_{\alpha \uparrow \infty} \alpha U^\alpha u \leq u$$

ist eine exzessive Funktion definiert, die sogenannte Regularisierte von u . Ist u exzessiv und $A \in \underline{E}$, so nennt man $\bar{P}_A u$ auch die Reduzierte von u auf A ; die Reduzierte ist quasiexzessiv, und es gilt

$$(1.1) \quad P_A u = \text{reg. } \bar{P}_A u$$

Die Menge der exzessiven Funktionen bezeichnen wir mit $\underline{S}$. Jede exzessive Funktion ist $\underline{T}_0$ -stetig.

Eine Funktion $h \in \underline{E}_+^*$ heißt harmonisch, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq \underline{E}$

$$h = P_{\underline{E}-K} h$$

gilt. Die Menge der harmonischen Funktionen bezeichnen wir mit $\underline{H}$. Jede harmonische Funktion ist exzessiv: $\underline{H} \subseteq \underline{S}$.

Im folgenden sei m ein auf kompakten Mengen endliches Maß auf $\underline{E}$. Wir bezeichnen mit $\underline{L}_0(m)$ die Menge der m -lokalintegrierbaren Funktionen, setzen

$$\langle f, g \rangle := \int f g d m \quad (f, g \in b \underline{E}^*)$$

und machen für den Rest der Arbeit die folgende

Hypothese (Existenz eines Coprozesses) :

Es gibt einen Standardprozess $\hat{X} = (\Omega, \underline{F}^0, \underline{F}_{t+}^0, x_t, \hat{P}^x)$ derart, daß gilt:

- 1) $\langle f, U^\alpha g \rangle = \langle \hat{U}^\alpha f, g \rangle \quad (f, g \in \underline{C}_0, \alpha > 0)$
- 2) Hat $f \in b \underline{E}^*$ einen kompakten Träger, so ist $\hat{U}^\alpha f(\cdot)$ stetig und endlich auf $E \quad (\alpha \geq 0)$.

Außerdem:

- 3) $U^\alpha(x, \cdot) \ll m \quad (x \in E, \alpha > 0)$
- 4) Ist $K \subseteq E$ kompakt, so ist die Funktion $U(\cdot, K)$ auf kompakten Mengen beschränkt.

$\hat{X}$ heißt Coprozess zu X , $(\hat{U}^\alpha)_{\alpha > 0}$ Coresolvente zu $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$.

Bemerkung Im klassischen Fall (Brown-Prozess auf einem beschränkten Gebiet des R^n) und im Falle der Wärme-gleichung (Raum-Zeit-Prozess auf einem Gebiet des R^{n+1}) ist die Hypothese erfüllt. Im klassischen Fall stimmen Prozess und Coprozess überein, im Falle der Wärme-gleichung entsteht der Coprozess aus dem Prozess durch Umkehrung der Zeitrichtung.

Analog zu unseren Definitionen für den Prozess X definieren wir für den Coprozess $\hat{X}$ die $\mathcal{S}$ -Körper $\hat{\underline{F}}, \hat{\underline{P}}_t$, ferner $(\hat{\underline{P}}_t)$ -Stopzeiten, die Kerne $\hat{\underline{P}}_T, \hat{\underline{P}}_A, \hat{\underline{P}}_A$ und die Coprozess-Topologie $\hat{\underline{T}}_0$. Funktionen aus $\underline{E}_+^*$, die in bezug auf den Coprozess exzessiv sind (also der Bedingung $\hat{\underline{P}}_t u \uparrow u \ (t \downarrow 0)$ genügen), nennen wir coexzessiv. Die Menge der coexzessiven Funktionen bezeichnen wir mit $\hat{\underline{S}}$.

Folgerung (Existenz eines Potentialkerns) :

Zu jedem $\alpha \geq 0$ gibt es genau eine Funktion $U^\alpha(.,.)$ auf $E \times E$ mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) $U^\alpha(.,.) \in \underline{E}^* \times \underline{E}^*$
- 2) $U^\alpha(x, dy) = U^\alpha(x, y) m(dy) \quad (x \in E)$
 $\hat{U}^\alpha(y, dx) = U^\alpha(x, y) m(dx) \quad (y \in E)$
- 3) $\beta U^{\alpha+\beta} U^\alpha(., y) \uparrow U^\alpha(., y) \quad (y \in E)$
 $\beta U^{\alpha+\beta} U^\alpha(x, .) \uparrow U^\alpha(x, .) \quad (x \in E) \quad (\beta \uparrow \infty)$

Statt " $U^0(.,.)$ " schreiben wir " $U(.,.)$ ". Dann ist

$$(1.2) \quad U(., y) \in \underline{S} \quad (y \in E), \quad U(x, .) \in \hat{\underline{S}} \quad (x \in E).$$

Für $x \in E$ und $\alpha \geq 0$ ist $U(x, .)$ unterhalbstetig auf E . Jede coexzessive Funktion ist unterhalbstetig auf E . Zwei exzessive Funktionen, die mod m übereinstimmen, sind identisch:

$$(1.3) \quad u, v \in \underline{S}, \quad u = v \ (m) \implies u = v$$

Ist $u \in \underline{S}$, so gilt

$$(1.4) \quad u \in \underline{L}_0(m) \iff u < \infty \quad (m)$$

Ist v quasiexzessiv und $v < \infty \quad (m)$, so gilt $v = \text{reg. } v \quad (m)$. Ist also $u \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$ und $A \in \underline{E}$, so folgt nach (1.1)

$$(1.5) \quad P_A u = \bar{P}_A u \quad (m)$$

Für jedes $u \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$ ist die Menge $\{u = \infty\}$ polar, d.h. es gilt

$$(1.6) \quad P^X(\mathbb{T}_{\{u = \infty\}} < \infty) = 0 \quad (x \in E)$$

Jede exzessive Funktion ist borelsch:

$$(1.7) \quad \underline{H} \subseteq \underline{S} \subseteq \underline{E}_+$$

Vereinbarung " $K_n \uparrow E$ " bedeute " K_n kompakt, $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), $\bigcup_n K_n = E$ ".

Eine Funktion $u \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$ nennen wir ein Potential, wenn gilt:

$$(1.8) \quad K_n \uparrow E \Rightarrow P_{E-K_n} u \downarrow 0 \quad (m)$$

Eine Funktion $u \in \underline{L}_0(m)$ ist genau dann ein Potential, wenn es ein Maß μ auf $\underline{E}$ gibt mit

$$(1.9) \quad u(.) = \int U(., y) \mu(dy) ;$$

dabei ist μ durch u eindeutig bestimmt.

Jede Funktion $u \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$ kann man auf genau eine Weise als Summe

$$(1.10) \quad u = h + p$$

einer harmonischen Funktion h und eines Potentials p darstellen (Riesz-Zerlegung) .

Bemerkung Die Beweise zu den Aussagen dieses Paragraphen findet man in [45] oder [3].

§ 2 . Martinrand und Integraldarstellung

Es gibt ein Maß r auf $\underline{E}$ derart, daß durch

$$rU(.) = \int r(dx)U(x,.)$$

eine stetige Funktion auf E mit $0 < rU < \infty$ gegeben ist ([45] p. 506). Ein solches Bezugsmaß r legen wir im folgenden zugrunde. Mit $\underline{L}(r)$ bezeichnen wir die Menge der r -integrierbaren Funktionen auf E . Jede exzessive Funktion aus $\underline{L}(r)$ ist m -lokalintegrabel:

$$(2.1) \quad \underline{S} \cap \underline{L}(r) \subseteq \underline{L}_0(m)$$

([45] prop. 9.1). Durch

$$K(x,y) := \frac{U(x,y)}{rU(y)}$$

definieren wir eine Funktion $K \in \underline{E} \times \underline{E}$. Für jedes $y \in E$

ist $K(.,y)$ ein Potential mit $\int K(.,y)dr = 1$
(nach (1.9)).

(2.2) Satz von Martin : Es gibt einen topologischen Raum $(E_M, \underline{T}_M)$, der bis auf Homöomorphie durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist:

- 1) $(E_M, \underline{T}_M)$ ist kompakt und metrisierbar.
- 2) E ist eine offene, dichte Teilmenge von E_M , und die Relativierung von $\underline{T}_M$ auf E stimmt mit der auf E vorgegebenen Topologie überein.
- 3) Jedem $\gamma \in E_M - E$ ist umkehrbar eindeutig eine Funktion $K(.,\gamma) \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$ zugeordnet derart, daß für jedes $f \in \underline{C}_0$

$$\int f(x)K(x,\gamma)m(dx) = \lim_{\underline{V}_M(\gamma)} \int f(x)K(x,.)m(dx)$$

gilt (mit $\underline{V}_M(\gamma)$ bezeichnen wir den Filter der $\underline{T}_M$ -Umgebungen von γ).

([15] Th.3, [10] 4.3)

E_M heißt Martinraum, $\underline{T}_M$ Martintopologie,

$$E' := E_M - E$$

Martinrand (zu E, X, r). Mit $\underline{E}_M$ bezeichnen wir den von $\underline{T}_M$ erzeugten σ -Körper auf $\underline{E}_M$. Die auf $E \times \underline{E}_M$ fortgesetzte Funktion K ist dann $\underline{E} \times \underline{E}_M$ -meßbar, und für

jedes $x \in E$ ist $K(x, \cdot)$ unterhalbstetig auf E_M
 ([15] p.510, [10] 4.2).

Eine Funktion $0 \neq u \in \underline{S}$ ist genau dann ein Extre-
 malpunkt des " Hutes "

$$\{ u \in \underline{S} \mid \int u dr \leq 1 \} \quad ,$$

wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

- 1) u ist ein extremales Potential $\neq 0$
 $\Leftrightarrow u = K(\cdot, y)$, $y \in E$
- 2) u ist eine extremale harmonische Funktion $\neq 0$
 $\Leftrightarrow u = K(\cdot, \eta)$, $\eta \in E'_1$

Dabei bezeichnet E'_1 eine passende borelsche Teilmenge
 des Martinrandes E' (den sogenannten minimalen Teil
 des Martinrandes). Setzen wir

$$E_N := E \cup E'_1 \quad ,$$

so gilt

$$(2.3) \quad \int K(\cdot, \eta) dr = 1 \quad (\eta \in E_N) \quad .$$

(Vgl. [10] 4.6, 4.7)

Jede Funktion $u \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$ ist Schwerpunkt einer Massen-
 verteilung auf den Extrempunkten $K(\cdot, \eta)$ ($\eta \in E_N$)
 (man kann diese Darstellung direkt durch " Fegen auf den
 Rand " ([15]) oder durch Anwendung der Sätze von Choquet
 über die Integraldarstellung in schwach vollständigen
 Kegeln ([10]) gewinnen) :

(2.4) Integraldarstellung von Martin : Durch

$$u(.) = \int K(., \eta) \mu_u(d\eta)$$

ist eine Bijektion zwischen den endlichen Maßen μ_u auf $E_M \cap E_N$ und den Funktionen $u \in \underline{S} \cap \underline{I}(r)$ gegeben. Dabei ist u genau dann harmonisch, wenn μ_u auf E'_1 konzentriert ist.

([15] Th.4, [10] 4.8)

Anmerkung Der Martinrand hängt nicht von m und $\hat{X}$ ab (Vermutung von M.Sieveking).

Beweisskizze: Haben $\hat{m}$ und $\hat{X}$ die Eigenschaften, die wir in §1 für m und $\hat{X}$ gefordert haben, und ist $\tilde{U}(.,.)$ der zugehörige Potentialkern, so kann man unter Verwendung von III (2.5) zeigen:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(., y) &= \lambda(y) U(., y), \quad 0 < \lambda(y) < \infty \quad (y \in E) \\ \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} dm = \lambda d\hat{m} \Rightarrow \lambda \in \underline{IS} \Rightarrow \lambda \text{ unterhalbstetig} \\ d\hat{m} = \lambda^{-1} dm \Rightarrow \lambda^{-1} \in \underline{IS} \Rightarrow \lambda^{-1} \text{ unterhalbstetig} \end{array} \right. \end{aligned}$$

(m und $\hat{m}$ sind exzessive Maße; vgl. [3]). Also entsteht $\hat{m}$ aus m durch Multiplikation mit einer stetigen Dichte $0 < \lambda^{-1} < \infty$. Insbesondere bestimmen m und $\hat{m}$ dieselben Bezugsmaße. Für das oben gewählte Bezugsmaß r gilt

$$\hat{K}(x, y) := r\tilde{U}(y)^{-1}\tilde{U}(x, y) = K(x, y),$$

und wegen $\lambda^{-1}f \in \underline{C}_0$ ($f \in \underline{C}_0$) ist klar, daß $(E_M, \underline{T}_M)$ die Eigenschaften eines Martinraums in bezug auf r und $\hat{m}$ hat.

§ 3 . h - Prozesse

Eine Abbildung $\alpha : \langle 0, \infty \rangle \times \Omega \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ heißt
multiplikatives Funktional auf X , wenn gilt:

- 1) $\alpha(t, \cdot) \in \underline{\mathbb{F}}_t$ $(0 \leq t < \infty)$
- 2) $\alpha(\cdot, \omega)$ ist rechtsstetig,
 $\alpha(t, \omega) = 0 \quad (t \geq \zeta(\omega)) \quad (\text{f.s.})$
- 3) $\alpha(t+s, \omega) = \alpha(t, \omega) \alpha(s, \omega \theta_t) \quad (s, t \geq 0) \quad (\text{f.s.})$
- 4) $E^x \alpha(t, \cdot) \leq 1 \quad (x \in E, 0 \leq t \leq \infty)$

Sei α ein multiplikatives Funktional auf X. Statt
" $\alpha(t, \omega)$ " schreiben wir auch " $\alpha_t(\omega)$ " . Aus 1) und
3) folgt $E^x \alpha_0 \in \{0, 1\} \quad (x \in E)$; sei

$$E_\alpha := \{x \in E \mid E^x \alpha_0 = 1\} \quad .$$

Zu α gibt es einen Standardprozess $X_\alpha = (\Omega, \underline{\mathbb{F}}^0, \underline{\mathbb{F}}_{t+}^0,$
 $x_t, P_\alpha^x)$ auf E mit

$$P_\alpha^x(x_t \in A) = \begin{cases} E^x(\alpha_t; x_t \in A) & (x \in E_\alpha) \\ 1_A(x) e^{-t} & (x \notin E_\alpha) \end{cases} \quad (A \in \underline{\mathbb{E}})$$

([4] prop. 5,6). Ist T eine $(\underline{\mathbb{F}}_{t+}^0)$ -Stopzeit und $\wedge \in \underline{\mathbb{F}}_{T+}^0$,
so gilt

$$(3.1) \quad P_\alpha^x(\wedge \cap \{T < \zeta\}) = E^x(\alpha_T; \wedge) \quad (x \in E_\alpha)$$

[14] prop. 4). Insbesondere gilt also für eine offene Menge $A \subseteq E$:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad P_{\alpha}^X(D_A < \infty) &= E^X(\alpha_{D_A}) \\ &= E^X(\alpha_{D_A}; D_A < \infty) \quad (x \in E_{\alpha}). \end{aligned}$$

(3.3) Bemerkung Eine leichte Modifikation des Beweises in [14] zeigt, daß (3.2) auch noch für Eintrittszeiten D_A mit $A \in \underline{E}$ gilt. Dazu benötigt man allerdings nicht nur, daß D_A eine Stopzeit für die zu X_{α} (so wie die $\underline{F}_t$ zu X) konstruierten Erweiterungen von $\underline{F}_t^0$ ist, sondern die schärfere Aussage, daß für jedes endliche Maß μ auf $\underline{E}$ und für jedes $t > 0$ die Menge $\{D_A < t\}$ in der P_{α}^{μ} -Vervollständigung von $\underline{F}_t^0$ liegt (vgl. dazu [17] p.103, Zeile 2-7).

Sei nun $h \in \underline{S}$, $E_h := \{x \in E \mid 0 < h(x) < \infty\}$. Dann ist durch

$$\alpha_h(t, \omega) := \begin{cases} \frac{h(x_t(\omega))}{h(x_0(\omega))} & x_0(\omega) \in E_h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(wir erinnern an die Vereinbarung $h(\Delta) := 0$) ein multiplikatives Funktional α_h auf X mit $E_{\alpha_h} = E_h$ gegeben. ([14] p.190). Den zugehörigen Standardprozess bezeichnen wir mit

$$X_h = (\Omega, \underline{F}^0, \underline{F}_{t+}^0, x_t, P_h^X)$$

und nennen ihn den h - Prozess. Statt " P_h^X " für jedes $x \in E_h$ " schreiben wir auch "h-fastsicher" oder "h-f.s." .

Ist speziell $h = K(., \eta)$ mit $\eta \in E_M$, so schreiben wir " X_η ", " η -f.s." u.s.w. statt " $X_{K(., \eta)}$ ", " $K(., \eta)$ -f.s." u.s.w. und nennen X den η -Prozess.

Für den h -Prozess gilt nach (3.2) und (3.3):

$$\begin{aligned} (3.4) \quad P_h^x (D_A < \infty) &= \frac{1}{h(x)} E^x h(x_{D_A}) \\ &= \frac{1}{h(x)} \bar{P}_A h(x) \quad (x \in E_h, A \in \underline{E}) \end{aligned}$$

Bemerkung Startet der h -Prozess in E_h , so bleibt er in E_h :

$$(3.5) \quad P_h^x (D_{E-E_h} < \infty) = 0 \quad (x \in E_h)$$

Denn wegen $x \in E_h$ ist $P^x(D_{\{h=\infty\}} < \infty) = 0$ ([8] 12.7), und damit folgt nach (3.4)

$$P_h^x (D_{\{h=\infty\}} < \infty) = 0$$

(man beachte $\{h=\infty\} \in \underline{E}$ gemäß (1.7)); wegen

$$h(x_{D_{\{h=0\}}}(\omega)) = \lim_{t \downarrow D_{\{h=0\}}(\omega)} h(x_t(\omega)) = 0 \quad (P^{x, D_{\{h=0\}} < \infty})$$

gilt

$$P_h^x (D_{\{h=0\}} < \infty) = \frac{1}{h(x)} E^x h(x_{D_{\{h=0\}}}) = 0 \quad ;$$

beides zusammen bedeutet (3.5).

Sei nun insbesondere $h \in \underline{S} \cap \underline{I}(r)$, und sei μ_h das zugehörige Maß auf $\underline{E}_M \cap \underline{E}_N$ gemäß (2.4).

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen μ_h und der Grenzverteilung der h-Pfade her:

In der Martintopologie $\underline{T}_M$ existiert

$$(3.6) \quad x_{\xi_-}(\omega) := \lim_{t \uparrow \xi(\omega)} x_t(\omega) \quad (\text{h-f.s.}),$$

und für jedes $x \in \underline{E}_h$ gilt

$$(3.7) \quad P_h^x(x_{\xi_-} \in A) = \frac{1}{h(x)} \int_A K(x, \eta) \mu_h(d\eta) \quad (A \in \underline{E}_M)$$

([15] Th.5).

Aus (3.7) und (2.3) folgt

$$(3.8) \quad \mu_h(A) = \int r(dx) P_h^x(x_{\xi_-} \in A) \quad (A \in \underline{E}_M)$$

(wegen $K \in \underline{E} \times \underline{E}_M$ können wir den Satz von Fubini anwenden; wir werden das im folgenden mehrfach tun, ohne jedesmal darauf hinzuweisen).

Für $x \in \underline{E}_h$ und $\wedge \in \underline{F}$ gilt

$$(3.9) \quad P_h^x(\wedge) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{\eta | x \in \underline{E}_\eta\}} K(x, \eta) P_\eta^x(\wedge) \mu_h(d\eta)$$

([15](12.5)). Ist dabei $P_h^x(\wedge) = 1$, so folgt wegen (2.4)

$$(3.10) \quad x \in \underline{E}_\eta, \quad P_\eta^x(\wedge) = 1 \quad (\mu_h).$$

§ 4 . Feine Topologien

In diesem Paragraphen fassen wir einige Resultate aus der allgemeinen Theorie der "feinen Topologie" von M. Brelot zusammen. Die Beweise findet man in [4].

Sei $(S, \underline{T})$ ein topologischer Raum, $\underline{U}$ ein konvexer spitzer Kegel von unterhalbstetiger Funktionen

$$u : S \longrightarrow \langle 0, \infty \rangle ,$$

der die Konstante $+\infty$ enthält. Mit $\underline{V}(x)$ bezeichnen wir den Filter der $\underline{T}$ -Umgebungen von $x \in S$.

Sei $\underline{T}_f$ die grösste unter den Topologien auf S , die feiner als $\underline{T}$ sind und bezüglich derer die Funktionen aus $\underline{U}$ stetig sind. Man nennt $\underline{T}_f$ die feine Topologie (zu $\underline{T}$ und $\underline{U}$); entsprechend spricht man von feinen Umgebungen, feinem Rand u.s.w.. Mit $\underline{V}_f(x)$ bezeichnen wir den Filter der feinen Umgebungen von $x \in S$.

Ist $\underline{T}$ separiert (uniformisierbar), so auch $\underline{T}_f$. Die Komplemente der feinen Umgebungen von $x \in S$ sind gerade die in x dünnen Mengen (Satz von Cartan-Brelot). Dabei heisst eine Menge $A \subseteq S$ dünn (effilé) in $x \notin A$, wenn es ein $u \in \underline{U}$ gibt mit

$$(4.1) \quad \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} u(y) := \sup_{V \in \underline{V}(x)} \left(\inf_{y \in V \cap A} u(y) \right) > u(x)$$

(wir treffen die Vereinbarung $\inf \emptyset := +\infty$). Ist x kein Häufungspunkt von A , so ist A dünn in x (man nehme $u = 0$).

Ist A dünn in $x \notin A$, so gibt es eine offene Obermenge von A , die in x dünn ist.

Zu $A \subseteq S$ bilden wir die Funktion

$$(4.2) \quad u_A := \inf \{ u \in \underline{U} \mid u \geq 1_A \} .$$

A ist genau dann dünn in $x \notin A$, wenn gilt:

$$(4.3) \quad \inf_{V \in \underline{V}(x)} u_{A \cap V}(x) < 1 .$$

Gilt sogar

$$(4.4) \quad \inf_{V \in \underline{V}(x)} u_{A \cap V}(x) = 0 ,$$

so sagt man, A sei sehr dünn (fortement effilé) in x . Gemäß (4.3) ist A genau dann nicht dünn (ineffilé) in $x \notin A$, wenn gilt:

$$\inf_{V \in \underline{V}(x)} u_{A \cap V}(x) \geq 1 .$$

Gilt sogar

$$(4.5) \quad \inf_{V \in \underline{V}(x)} \left(\sup_{W \in \underline{V}(x)} u_{A \cap V \cap W^c}(x) \right) = 1$$

so sagt man, A sei dick (fortement ineffilé) in x .

Sei nun $x \in S$, und sei $A \subseteq S$ nicht dünn in x . Dann sind $\underline{V}(x) \cap A$ und $\underline{V}_f(x) \cap A$ Filter auf A . Sei f eine Abbildung von A nach $\langle -\infty, +\infty \rangle$. Wir wollen sagen, $\lambda \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ sei feiner Häufungswert bzw. feiner Limes von f in x , wenn λ Häufungspunkt bzw. Konvergenzpunkt der Filterbasis $f(\underline{V}_f(x) \cap A)$ ist. Es gilt dann der folgende

(4.6) Konvergenzsatz von Doob-Brelot :

- 1) "nicht dünn in x " impliziere "dick in x ",
und $\underline{V}(x)$ habe eine abzählbare Umgebungsbasis.
Ist dann λ ein feiner Häufungswert von f in x ,
so gibt es eine in x dicke Menge $A_0 \subseteq A$ mit

$$(4.7) \quad \lim_{\underline{V}(x) \cap A_0} f = \lambda$$

- 2) "dünn in x " impliziere "sehr dünn in x ",
und es gelte

$$(4.8) \quad u_n \in \underline{U} \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \sum_n u_n \in \underline{U}.$$

Ist dann λ feiner Limes von f in x , so gibt
es eine in x dünne Menge $A_1 \subseteq A$ mit

$$(4.9) \quad \lim_{\underline{V}(x) \cap (A - A_1)} f = \lambda$$

II. NAIM-TOPOLOGIE

In diesem Kapitel definieren wir zu jedem minimalen Randpunkt η einen Filter $\underline{F}(\eta)$ auf E ($\underline{F}(\eta)$ besteht aus den Komplementen derjenigen Mengen, die der η -Prozess nicht mit Sicherheit trifft) und setzen die Prozess-Topologie so auf den minimalen Teil des Martinrandes fort, daß der E -Schnitt des Umgebungsfilters von $\eta \in E_1'$ gerade mit $\underline{F}(\eta)$ übereinstimmt (§ 2). Wir werden später benötigen, daß jeder dieser Filter eine Basis aus abgeschlossenen Mengen hat; dazu beweisen wir einen Approximationssatz für h -Prozesse (§ 1).

§ 1. Ein Approximationssatz für die Reduzierte einer harmonischen Funktion

(1.1) Satz Ist $h \in \underline{H} \cap \underline{L}(r)$ und $A \in \underline{E}$, so gilt für jedes $x \in \{h < \infty\}$

$$(1.2) \quad P_A h(x) = \inf_{\substack{G \supseteq A \\ G \text{ offen}}} P_G h(x)$$

Anmerkung Für die Anwendungen in diesem Kapitel würde genügen, daß man die Reduzierte auf A durch die Reduzierten auf $\underline{T}_0$ -offene Obermengen von A approximieren kann. Erst in Kapitel III werden wir (1.1) wirklich ausnutzen.

Sei $h \in \underline{H} \cap \underline{L}(r)$ und $A \in \underline{E}$. Ist $x \in \{h = 0\}$, so ist (1.2) klar (man nehme $G = E$). Sei also $x \in E_h$. Wegen I (3.4) ist dann (1.2) gleichbedeutend mit

$$(1.3) \quad P_h^X(D_A < \zeta) = \inf_{\substack{G \supseteq A \\ G \text{ offen}}} P_h^X(D_G < \zeta)$$

Abkürzend setzen wir

$$I(B) := P_h^X(D_B < \zeta) \quad (B \in \underline{E})$$

und beweisen zunächst das folgende Lemma.

(1.4) Lemma Ist $A_n, B_n \in \underline{E}$, $A_n \subseteq B_n$ ($n = 1, 2, \dots$), so gilt

$$(1.5) \quad I(\bigcup_n B_n) - I(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n (I(B_n) - I(A_n))$$

Beweis: I ist eine nichtnegative isotone Funktion auf $\underline{E}$. Für $B, C \in \underline{E}$ gilt

$$\begin{aligned} I(B \cup C) &= P_h^X(D_{B \wedge C} < \zeta) \\ &= P_h^X(D_B < \zeta, D_B \leq D_C) + P_h^X(D_C < \zeta, D_B > D_C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(B \cap C) &= P_h^X(D_B \vee D_C < \zeta) \\ &= P_h^X(D_B < \zeta, D_B > D_C) + P_h^X(D_C < \zeta, D_B \leq D_C), \end{aligned}$$

und damit folgt

$$I(B \cup C) + I(B \cap C) \leq I(B) + I(C),$$

d.h. I ist stark subadditiv. Daraus folgt aber

$$I(\bigcup_{n \in k} B_n) - I(\bigcup_{n \in k} A_n) \leq \sum_{n \in k} (I(B_n) - I(A_n)) \leq \sum_n (I(B_n) - I(A_n))$$

für jedes $k \geq 1$ ([47] III, T 21 und (22.2)), und damit (1.5).

Beweis von (1.3)

1) Sei (T_n) eine isotone Folge von Stopzeiten für X_n (d.h. bezüglich der zu X_n - wie die $\mathbb{F}_t$ zu X - konstruierten Vervollständigungen der $\mathbb{F}_t^0$), und sei $T := \sup T_n$. Wir wollen zunächst zeigen:

$$(1.6) \quad x_{T_n} \rightarrow x_T \quad (P_h^x) .$$

Da X_n ein Standardprozess ist, gilt $x_{T_n} \rightarrow x_T$ (P_h^x , $T < \infty$), außerdem gilt $x_{T_n} \rightarrow x_T = \Delta$ auf der Menge $\bigcup_n \{T_n \geq \infty\}$, es bleibt also zu zeigen:

$$(1.7) \quad x_{T_n} \rightarrow \Delta \quad (P_h^x, T_n \uparrow \infty)$$

(denn auf $\{T_n \uparrow \infty\}$ ist $x_T = \Delta$). Nun existiert aber nach I (3.7) und I (2.4) in der Martintopologie auf E_M

$$x_{\infty} = \lim_{t \uparrow \infty} x_t \in E_1^1 \quad (P_h^x) ,$$

und das bedeutet in der Alexandroff-Topologie auf E_Δ :

$$\lim_{t \uparrow \infty} x_t = \Delta \quad (P_h^x) .$$

Da auf $\{T_n \uparrow \infty\}$ stets $\lim_{t \uparrow \infty} x_t = \lim_n x_{T_n}$ gilt, folgt (1.7) und damit (1.6).

Da man (1.6) zur Verfügung hat, kann man das übliche Beweisverfahren zur Approximation von Eintrittszeiten in Borelmengen aus der Theorie der Hunt-Prozesse verwenden und schließen:

$$(1.8) \quad \text{Zu } B \in \mathbb{E} \text{ gibt es eine antitone Folge von offenen Mengen } G_n \supseteq A \text{ mit } D_{G_n} \uparrow D_B \quad (P_h^x) .$$

(vgl. [3] I (10.18) oder [4] III.2).

2) Sei $B \in \underline{E}$ relativ kompakt. Zu B bestimmen wir eine Folge (G_n) gemäß (1.8); dabei können wir annehmen, daß alle G_n in einer festen kompakten Menge K enthalten sind. Wir setzen

$$\Lambda := \bigcap \{D_{G_n} < \mathfrak{S}\}$$

$$\Lambda_1 := \Lambda \cap \{D_B = \sup D_{G_n}, D_B < \mathfrak{S}\}$$

$$\Lambda_2 := \Lambda \cap \{D_B = \sup D_{G_n}, D_B \geq \mathfrak{S}\}$$

$$\Lambda_3 := \Lambda \cap \{D_B \neq \sup D_{G_n}\}$$

Wegen $D_G \uparrow D_B$ (P_h^X) gilt $P_h^X(\Lambda_1) = P_h^X(D_B < \mathfrak{S})$ und $P_h^X(\Lambda_3) = 0$, wegen $G_n \subseteq K$ ($n = 1, 2, \dots$) und (1.7) $P_h^X(\Lambda_2) = 0$. Wegen $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$ folgt also

$$\begin{aligned} (1.9) \quad I(B) &= P_h^X(D_B < \mathfrak{S}) \\ &= P_h^X(\Lambda) \\ &= \lim_n P_h^X(D_{G_n} < \mathfrak{S}) \\ &= \lim_n I(G_n) \end{aligned}$$

3) Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $K_n \uparrow E$ und setzen $A_n := A \cap K_n$. Zu A_n gibt es nach (1.9) eine offene Menge $G_n \supseteq A_n$ mit

$$I(G_n) \leq I(A_n) + \varepsilon 2^{-n},$$

und nach (1.5) folgt für die offene Menge $G := \bigcup_n G_n$

$$I(G) \leq I(A) + \varepsilon.$$

Damit ist (1.3) gezeigt.

§ 2 . η -Filter

Sei $\eta \in E_1'$.

(2.1) Definition Eine Menge $A \in \underline{E}$ heiße η -dünn , wenn sie nicht η -f.s. erreicht wird, d.h. wenn es ein $x \in E_\eta$ mit

$$(2.2) \quad P_\eta^x (D_A < \infty) \neq 1$$

gibt. Eine beliebige Menge $B \subseteq E$ nennen wir η -dünn, wenn sie in einer η -dünnen Menge $A \in \underline{E}$ enthalten ist.

(2.3) Satz Ist $A \in \underline{E}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) A ist η -dünn
- 2) $\overline{P}_A K(., \eta) \neq K(., \eta)$
- 3) $P_A K(., \eta) \neq K(., \eta)$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) ist klar wegen I (3.4), 2) $\Rightarrow$ 3) wegen

$$P_A K(., \eta) \leq \overline{P}_A K(., \eta) \leq K(., \eta) \quad ,$$

3) $\Rightarrow$ 2) wegen I (1.5) und I (1.3). Ist $B := \{ \overline{P}_A K(., \eta) < K(., \eta) \} \subseteq \{ K(.,) > 0 \}$ in der m -Nullmenge $\{ K(., \eta) = \infty \}$ enthalten, so folgt $B = \emptyset$ wegen I (1.5) und I (1.3). Also impliziert 2), daß es ein $x \in B \cap E_\eta$ gibt, und wegen I (3.4) bedeutet das gerade 1).

(2.4) Lemma Ist $A \subseteq E$ η -dünn, so gibt es

- 1) eine η -dünne Menge $B \supseteq A$, die offen ist,
- 2) eine η -dünne Menge $C \supseteq A$, die $\underline{T}_0$ -abgeschlossen ist.

Beweis: 1) folgt wegen $K(., \eta) \in \underline{H} \cap \underline{L}(r)$ aus (1.3).

2) Wegen 1) können wir annehmen, daß A offen ist. Sei C die $\underline{T}_0$ -abgeschlossene Hülle von A . Dann ist $C \in \underline{E}$ und $D_C = D_A$ (f.s.) ([8] 4.12). Damit folgt $P_A^K(., \eta) = P_C^K(., \eta)$. Ist also A η -dünn, so auch C .

(2.5) Lemma Sei $V \in \underline{V}_M(\eta)$. Dann gilt:

- 1) $V \cap E$ ist nicht η -dünn
- 2) $E - V$ ist η -dünn

Beweis: 1) Für jedes $x \in E_\eta$ gilt nach I (3.7) $x \in E_\eta = \eta(P_\eta^x)$, erst recht also $P_\eta^x(D_{V \cap E} < \zeta) = 1$.

2) Sei $K_n \uparrow E$, $D_n := D_E - K_n$, $x \in E_\eta$. Dann gilt $D_n \uparrow \zeta(P_\eta^x)$, also

$$x_{D_n} \longrightarrow \eta \quad \text{in } \underline{T}_{\mathbb{R}^d} \quad (P_\eta^x)$$

gemäß I (3.7), und damit folgt

$$\begin{aligned} \lim P_\eta^x P_\eta^{x_{D_n}}(D_E - V < \zeta) &= \lim P_\eta^x(D_E - V \in D_n + D_n < \zeta) \\ &= P_\eta^x\left(\bigcap_n \{D_E - V \in D_n + D_n < \zeta\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es muß also ein $y \in E_\eta$ mit $P_\eta^y(D_E - V < \xi) = 1$ geben (man beachte I (3.5)).

(2.6) Satz Eine Menge $A \in \underline{E}$ ist genau dann η -dünn, wenn $P_A K(., \eta)$ ein Potential ist.

Beweis: $K(., \eta)$ ist eine harmonische Funktion $\neq 0$ und deshalb kein Potential. Ist also $P_A K(., \eta)$ ein Potential, so folgt $P_A K(., \eta) \neq K(., \eta)$, und nach (2.3) ist A dann η -dünn.

Ist umgekehrt A η -dünn, so können wir nach (2.4) annehmen, daß A offen ist (ist nämlich $P_G K(., \eta)$ ein Potential und $G \supseteq A$, so ist auch $P_A K(., \eta) \leq P_G K(., \eta)$ ein Potential). Wegen $P_A K(., \eta) \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$ können wir die Riesz-Zerlegung bilden:

$$P_A K(., \eta) = h + p.$$

Da $K(., \eta)$ extremal harmonisch ist und $h \leq K(., \eta)$, folgt $h = \lambda K(., \eta)$ mit $\lambda < 1$. Da A offen ist, gilt $P_A = (P_A)^k$ ($k \geq 1$), und damit folgt

$$P_A K(., \eta) = \lambda^k K(., \eta) + k p \quad (k \geq 1).$$

Sei nun $K_n \uparrow E$, $D_n := D_E - K_n$. Für m -fastalle x gilt $K(x, \eta) \sim \infty$ und $\lim_{D_n} P_{D_n} p(x) = 0$, also

$$\begin{aligned} \lim_{D_n} P_{D_n} P_A K(., \eta)(x) &\leq \lambda^k \lim_{D_n} P_{D_n} K(., \eta)(x) \\ &\quad + k \lim_{D_n} P_{D_n} p(x) \\ &= \lambda^k K(x, \eta) \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

Wegen $\lambda < 1$ folgt $\lim P_D (P_A K(., \eta))(x) = 0 \quad (m)$,
d.h. $P_A K(., \eta)$ ist ein Potential.

Wir setzen nun

$$(2.7) \quad \underline{F}(\eta) := \{A \subseteq E \mid E-A \text{ ist } \eta\text{-dünn}\}$$

und werden $\underline{F}(\eta)$ auch η -Filter nennen. Denn:

(2.8) Korollar $\underline{F}(\eta)$ ist ein Filter .

Beweis: Wegen

$$P_{A \cup B} K(., \eta) \leq P_A K(., \eta) + P_B K(., \eta)$$

folgt aus (2.6), daß die Vereinigung zweier η -dünner Mengen selbst η -dünn ist (wird eine exzessive Funktion von der Summe zweier Potentiale majorisiert, so ist sie selbst ein Potential). Also ist $\underline{F}(\eta)$ abgeschlossen gegen die Bildung endlicher Durchschnitte. Die übrigen Filtereigenschaften sind klar.

Die Filter $\underline{F}(\eta)$ ($\eta \in E'_1$) lassen sich als E-Schnitte von Umgebungsfiltern interpretieren:

(2.9) Satz Es gibt eine Topologie T_N auf $E_N = E \cup E'_1$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$1) \quad \underline{F}(\eta) = \underline{V}_N(\eta) \cap E \quad (\eta \in E'_1)$$

($\underline{V}_N(\eta)$ bezeichne den Filter der $\underline{T}_N$ -Umgebungen von η)

- 2) Die Relativierung von $\underline{T}_N$ auf E stimmt mit der Prozess-Topologie überein:

$$\underline{T}_N \cap E = \underline{T}_0$$

- 3) Jede andere Topologie auf E_N , die 1) und 2) erfüllt, ist feiner als $\underline{T}_N$.

Der topologische Raum $(E_N, \underline{T}_N)$ ist separiert, und E'_1 ist der $\underline{T}_N$ -Rand von E . Für jedes $\eta \in E'_1$ ist durch

$$(2.10) \quad F \cup \{\tilde{\eta} \in E'_1 \mid F \in \underline{F}(\tilde{\eta})\} \quad (F \in \underline{F}(\eta))$$

eine Basis des $\underline{T}_N$ -Umgebungsfilters von η gegeben.

Beweis: Für jedes $\eta \in E'_1$ hat $\underline{F}(\eta)$ nach (2.4) eine Basis aus $\underline{T}_0$ -offenen Mengen. Man kann deshalb den Satz von Myskis anwenden (vgl. [5] V.4 oder [12] p.318) und erhält eine Topologie $\underline{T}_N$ auf E_N mit 1), 2), 3) und (2.10). Außerdem sind wegen (2.5) die Zusatzbedingungen erfüllt, die die Separiertheit von $\underline{T}_N$ garantieren (vgl. [5]). Daß E'_1 der $\underline{T}_N$ -Rand von E ist, folgt unmittelbar aus 1).

Anmerkung Die η -dünnen Mengen wurden im klassischen Fall zuerst von L. Naim in [13] untersucht (von J.L. Doob wurden sie in [7] wahrscheinlichkeitstheoretisch interpretiert). Wir werden deshalb die mittels der η -dünnen Mengen definierte Topologie $\underline{T}_N$ auch die Naim-Topologie nennen.

III. FEINE TOPOLOGIE

In diesem Kapitel definieren wir auf dem Martinraum eine "feine Topologie" im Sinne von I.4. Diese Topologie stimmt auf E in der Regel mit der Coprozess-Topologie überein (§ 1); der zugehörige Rand von E ist gerade der minimale Teil des Martinrandes (§ 3). In § 2 stellen wir den Zusammenhang mit der Naim-Topologie her.

§ 1. K - Potentiale

(1.1) Definition Ist $\mu \geq 0$ ein Maß auf $\underline{E}$, so nennen wir die durch

$$\mu K(\eta) = \int \mu(dx) K(x, \eta) \quad (\eta \in E_M)$$

erklärte Funktion auf E_M ein K - Potential.

(1.2) Bemerkung Für jedes $x \in E$ ist $K(x, \cdot)$ T_M -unterhalbstetig auf E_M (I.2), und das gilt auch für jedes K-Potential (Lemma von Fatou).

Die K-Potentiale bilden zusammen mit der Konstanten + einen konvexen spitzen Kegel unterhalbstetiger Funktionen auf dem topologischen Raum (E_M, T_M) . Mit $T_{\underline{K}}$ bezeichnen wir die zugehörige feine Topologie gemäß I.4, mit $\underline{V}_K(\eta)$ den zugehörigen feinen Umgebungsfiler von $\eta \in E_M$. $T_{\underline{K}}$ ist separiert und uniformisierbar (vgl. I.4 und I (2.2)).

Gemäß I (4.1) nennen wir eine Menge $A \subseteq E_M$ dünn in η , wenn $\eta \in E_M - A$ ist und es ein Maß μ auf $\underline{E}$ gibt mit

$$(1.3) \quad \liminf_{\substack{y \rightarrow \eta \\ y \in A}} \mu K(y) > \mu K(\eta)$$

(1.4) Bemerkung Ist A dünn in η , so gibt es eine offene Obermenge von A , die in η dünn ist (vgl. I.4).

In der Regel stimmt $\underline{T}_K$ auf E mit der Coprozess-Topologie überein. Genauer:

(1.5) Satz Die Regularitätsbedingungen, die wir in I.1 für den Prozess gefordert haben, seien auch für den Coprozess erfüllt. Dann gilt:

$$(1.6) \quad \underline{T}_K \cap E = \hat{\underline{T}}_0$$

Beweis: Zunächst gilt $\underline{T}_K \cap E \subseteq \hat{\underline{T}}_0$, denn die Einschränkung eines K -Potentials auf E ist wegen

$$\mu K(y) = (rU(y))^{-1} \int \mu(dx) U(x, y) \quad (y \in E)$$

Produkt einer stetigen und einer $\hat{\underline{T}}_0$ -stetigen (weil coexzessiven) Funktion, also $\hat{\underline{T}}_0$ -stetig.

Unter der Voraussetzung des Satzes folgt, daß $\hat{\underline{T}}_0$ von den coexzessiven Funktionen erzeugt wird ([3] VI (4.6)); der Beweis zeigt, daß es dabei genügt, die endlichen coexzessiven Funktionen zu nehmen. Wir brauchen deshalb nur noch zu zeigen:

(1.7) Jedes endliche $u \in \hat{\underline{S}}$ ist $\underline{T}_K \cap E$ - stetig

Sei also $u \in \hat{\underline{S}}$ endlich, und sei $\emptyset \neq G \subseteq E$ offen und relativ kompakt. Es gibt dann ein Maß μ auf $\underline{E}$ derart, daß

$$\hat{P}_G u(y) = \mu K(y) \quad (y \in E)$$

gilt (man wende [45] prop. 7.10 unter Beachtung von prop. 7.1 auf den Coprozess an), und damit folgt, daß $\hat{P}_G u$ $\underline{T}_K \cap E$ - stetig ist. Wegen

$$u(y) = \hat{P}_G u(y) \quad (y \in G)$$

ist also die Einschränkung von u auf G $\underline{T}_K \cap G$ - stetig. G war beliebig, also gilt (1.7).

§ 2 . Die feinen Umgebungen minimaler Randpunkte

Wir wollen in diesem Paragraphen untersuchen, wie die feine Topologie $\underline{T}_K$ mit der Naim-Topologie $\underline{T}_N$ zusammenhängt. Im klassischen Fall gilt

$$(2.1) \quad \underline{T}_N = \underline{T}_K \cap \underline{E}_N$$

[15] VII, Th.4). Dabei folgt die Übereinstimmung auf E sofort aus (1.5), denn der Brown-Prozess ist mit seinem Coprozess identisch. Aus (1.5) folgt sofort auch, daß man (2.1) i.a. nicht erwarten kann: im Falle der Wärme-gleichung ist $\underline{T}_0 \neq \hat{\underline{T}}_0$. Wir werden aber zeigen, daß die beiden Topologien stets "am Martinrand übereinstimmen". Dabei ist der folgende Satz der wesentliche Schritt.

$$(2.2) \text{ Satz} \quad \underline{V}_K(\eta) \cap E = \underline{F}(\eta) \quad (\eta \in E_1)$$

Sei $\eta \in E_1$. Offenbar ist dann (2.2) gleichbedeutend mit

$$(2.3) \quad A \text{ dünn in } \eta \iff A \text{ } \eta\text{-dünn} \quad (A \subseteq E)$$

(vgl. I.4, Satz von Cartan-Brelot).

Beweis von (2.3) Sei $A \subseteq E$. Wegen (1.4) und II (2.4) können wir annehmen, daß A offen ist.

1) Sei A dünn in η , d.h. es gebe ein Maß μ auf $\underline{E}$ mit

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow \eta \\ y \in A}} \mu K(y) > \mu K(\eta) .$$

Man kann dann ein $V \in \underline{V}_M(\eta)$ und eine reelle Zahl $c > 0$ wählen derart, daß für jedes $y \in G := A \cap V$

$$(2.4) \quad \mu K(y) \geq c > \mu K(\eta)$$

gilt. Aus der ersten Relation folgt

$$c^{-1} \mu U(y) \geq r U(y) \quad (y \in G)$$

und damit, wegen $\mu U, r U \in \hat{\underline{S}}$,

$$\begin{aligned} c^{-1} \mu U(y) &\geq \hat{\underline{E}}^y r U(x_{T_G}) \\ &= \int r U(z) \hat{P}_G^y(dz, y) \\ &= \int r(dx) \int U(x, z) \hat{P}_G^y(dz, y) \quad (y \in E) \end{aligned}$$

($\hat{P}_G(dz, y)$ bezeichnet die Verteilung der ersten Treffer von G des Coprozesses bei Start in y).
Wir benutzen nun die folgende Relation von Hunt:

$$(2.5) \quad \int P_G(x, dz) U(z, y) = \int U(x, z) \hat{P}_G(dz, y)$$

(vgl. [3] VI (1.16)). Damit erhalten wir

$$\int r(dx) \int P_G(x, dz) U(z, y) \leq c^{-1} \mu U(y) \quad (y \in E)$$

und nach Multiplikation mit rU^{-1}

$$(2.6) \quad \int r(dx) P_G K(., y)(x) \leq c^{-1} \mu K(y) \quad (y \in E).$$

Sei nun $K_n \uparrow K$. Zu jedem $n \geq 1$ gibt es ein Maß ν_n auf $\underline{E}$ mit Träger in K_n derart, daß

$$P_{K_n} K(., \eta) = \int K(., y) \nu_n(dy)$$

gilt ([15] prop. 7.10). Außerdem gilt $P_{K_n} K(., \eta) \uparrow K(., \eta)$. Mit (2.6), (2.4) und I (2.3) folgt unter Verwendung der Sätze von Fubini und Beppo Levi

$$\begin{aligned} \int r(dx) P_G K(., \eta)(x) &= \lim \int r(dx) P_G \left(\int \nu_n(dy) K(., y)(x) \right) \\ &= \lim \int \nu_n(dy) \int r(dx) P_G K(., y)(x) \\ &\leq c^{-1} \lim \int \nu_n(dy) \mu K(y) \\ &= c^{-1} \lim \int \mu(dx) P_{K_n} K(., \eta)(x) \\ &= c^{-1} \int \mu(dx) K(x, \eta) \end{aligned}$$

$$= c^{-1} \mu K(\eta)$$

$$< 1 = \int r(dx) K(x, \eta) .$$

Also ist $P_G K(., \eta) \neq K(., \eta)$, und nach II (2.3) folgt, daß G η -dünn ist. Damit ist aber auch $A \subseteq G \cup (E - V)$ η -dünn (nach II (2.5)).

2) Sei A η -dünn. Es gibt dann ein $x \in E_\eta$ mit $P_A K(., \eta)(x) < K(x, \eta)$. Setzen wir also $\mu(.) := P_A(x, .)$, so gilt

$$(2.7) \quad \mu K(\eta) < K(x, \eta) .$$

Da A offen ist, gilt für jedes $y \in A$ $\hat{P}_A(., y) = \delta_{\{y\}}$, und damit folgt unter Verwendung von (2.5)

$$\begin{aligned} \mu K(y) &= rU(y)^{-1} \int P_A(x, dz) U(z, y) \\ &= rU(y)^{-1} \int U(x, z) \hat{P}_A(dz, y) \\ &= rU(y)^{-1} U(x, y) \\ &= K(x, y) \quad (y \in A) . \end{aligned}$$

$K(x, .)$ ist unterhalbstetig auf E_M , also folgt mit (2.7)

$$\begin{aligned} \liminf_{\substack{y \rightarrow \eta \\ y \in A}} \mu K(y) &= \liminf_{\substack{y \rightarrow \eta \\ y \in A}} K(x, y) \\ &\geq K(x, \eta) > \mu K(\eta) , \end{aligned}$$

d.h. A ist dünn in η .

$$(2.8) \quad \underline{\text{Korollar}} \quad \underline{V}_N(\eta) = \underline{V}_K(\eta) \cap E_N \quad (\eta \in E'_1)$$

Beweis: Wegen (2.2) und II (2.10) folgt " $\supseteq$ " wie im klassischen Fall und " $\subseteq$ " wie im Minimalitätsbeweis zum Satz von Myskis (vgl. [5] VII.5 und V.3).

§ 3 . Der feine Rand von E

(3.1) Satz Der feine Rand von E, also der Rand von E im topologischen Raum $(E_M, \underline{T}_K)$, ist gerade der minimale Teil des Martinrandes :

$$(3.2) \quad E'_1 = \partial_K E$$

Wir zeigen zunächst:

(3.3) Lemma Sei $0 \neq u \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$, $\eta \in E'$ mit $K(., \eta) \neq 0$. Gilt dann

$$(3.4) \quad P_{E \cap V} u = u \quad (V \in \underline{V}_M(\eta)),$$

so ist $\eta \in E'_1$, und es gibt ein $\lambda \in (0, \infty)$ mit

$$(3.5) \quad u = \lambda K(., \eta)$$

Beweis: 1) Sei $V_n \in \underline{V}_M(\eta)$, $\bar{V}_{n+1} \subseteq V_n$ ($n = 1, 2, \dots$),
 $\bigcap V_n = \{\eta\}$. Es gibt dann zu jedem $n \geq 1$ ein auf $\bar{V}_n$ konzentriertes Maß ν_n auf $\underline{E}_M$ mit

$$P_{E \cap V_n} u(.) = \int K(., \tilde{\eta}) \nu_n(d\tilde{\eta})$$

([15] p.514), also

$$(3.6) \quad u(.) = \int K(., \tilde{\eta}) \nu_n(d\tilde{\eta})$$

gemäß (3.4). Wegen $u, K(., \eta) \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$ gibt es ein $x \in E_\eta$ mit $u(x) < \infty$ (nach I (2.1) und I (1.3) wäre sonst $K(., \eta) = 0$). Die Funktion $K(x, \eta)$ ist unterhalb-stetig auf E_M , es gibt also zu $0 < \alpha < K(x, \eta)$ ein $n_0 \geq 1$ mit

$$\begin{aligned} \|\nu_n\| &\leq (K(x, \eta) - \alpha)^{-1} \int K(x, \tilde{\eta}) \nu_n(d\tilde{\eta}) \\ &= (K(x, \eta) - \alpha)^{-1} u(x) < \infty \quad (n \geq n_0). \end{aligned}$$

Man kann deshalb o.B.d.A. $\nu_n \rightarrow \nu$ (schwach) annehmen, wobei ν ein passendes endliches Maß auf $\underline{E}_M$ ist.

Wir wollen nun (3.5) mit $\lambda = \|\nu\|$ zeigen. Dazu wählen wir ein $f \in \underline{C}_0$ und ein $\varepsilon > 0$. Nach I (2.2) gibt es ein $n \geq 2$ mit

$$\left| \int fK(., \tilde{\eta}) d\mu - \int fK(., \eta) d\mu \right| \leq \varepsilon \quad (\tilde{\eta} \in V_{n-1}),$$

außerdem kann man für $|\|\nu_n\| - \|\nu\|| \leq \varepsilon$ sorgen. Da ν_n jedenfalls auf V_{n-1} konzentriert ist, folgt unter Verwendung von (3.6)

$$\begin{aligned} &\left| \int f u d\mu - \int f \|\nu\| K(., \eta) d\mu \right| \\ &\leq \int \nu_n(d\tilde{\eta}) \left| \int f K(., \tilde{\eta}) d\mu - \int f K(., \eta) d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int f K(., \eta) d\mu \right| |\|\nu_n\| - \|\nu\|| \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon (M + \int fK(.,\eta) dm)$$

mit $M := \sup_n \|v_n\|$. Da $\varepsilon > 0$ und $f \in \underline{C}_0$ beliebig waren, folgt

$$u(.) = \|v\| K(.,\eta) \quad (m)$$

und damit (3.5) (nach I (1.3)).

2) Sei $K(.,\eta) = u_1 + u_2$, $u_i \in \underline{S}$, $\int u_i dr \leq 1$ ($i=1,2$). Für jedes $v \in \underline{V}_M(\eta)$ gilt dann wegen (3.4) und (3.5)

$$\begin{aligned} P_{E \cap V} u_1 + P_{E \cap V} u_2 &\leq u_1 + u_2 = P_{E \cap V}(u_1 + u_2) \\ &= P_{E \cap V} u_1 + P_{E \cap V} u_2, \end{aligned}$$

also $P_{E \cap V} u_i = u_i$ ($i=1,2$), und daraus folgt wie in 1) $u_i = \lambda_i K(.,\eta)$ ($i=1,2$). Damit ist gezeigt, daß $K(.,\eta)$ ein Extrempunkt des Hutes $\{u \in \underline{S} \mid \int u dr \leq 1\}$ ist, und das bedeutet $\eta \in E_1^i$ (vgl. I.2).

Beweis von (3.2)

Ist $\eta \in E_1^i$, so ist E nicht η -dünn (nach II (2.8)), also nicht dünn in η (nach (2.3)), und das bedeutet $\eta \in \partial_K E$. Sei nun $\eta \notin E_1^i$. Ist $K(.,\eta) = 0$, so ist E dünn in η (denn für $\mu(B) = +\infty$ ($B \in \underline{E}$) ist $\mu K(y) = \infty$ ($y \in E$), aber $\mu K(\eta) = 0$), also $\eta \notin \partial_K E$. Wir können also $K(.,\eta) \neq 0$ annehmen. Nach (3.3) gibt es dann ein $v \in \underline{V}_M(\eta)$ mit $P_{E \cap V} K(.,\eta) \neq K(.,\eta)$. Daraus folgt wie im zweiten Teil des Beweises von (2.3), daß $E \cap V$ dünn in η ist. Dann ist aber auch E dünn in η , also $\eta \notin \partial_K E$.

IV. GRENZVERHALTEN h -EXZESSIVER FUNKTIONEN

In diesem Kapitel wollen wir das Verhalten exzessiver Funktionen in der Nähe des Martinrandes beschreiben. Wir legen dabei einen h -Prozess mit $h \in \underline{H} \cap \underline{L}(r)$ zugrunde; dies garantiert uns, daß die Pfade zum Martinrand führen. Die exzessiven Funktionen dieses Prozesses sind gerade die Funktionen $\frac{u}{h}$ mit $u \in \underline{S}$ (§ 1). In § 2 untersuchen wir die Konvergenz von $\frac{u}{h}$ entlang Pfaden und interpretieren dann in § 3 die Konvergenz entlang Pfaden als Konvergenz in der feinen Topologie. In § 4 charakterisieren wir die dünnen und die nicht dünnen Mengen in bezug auf einen minimalen Randpunkt; als Anwendung erhalten wir eine Beschreibung des Grenzverhaltens entlang Pfaden mittels der Martintopologie.

§ 1. h -exzessive und h -harmonische Funktionen

Sei $h \in \underline{S}$, $E_h := \{x \in E \mid 0 < h(x) < \infty\}$, X_h der zugehörige Standardprozess (vgl. I.3).

(1.1) Definition Eine Funktion $v \in \underline{E}^*$ nennen wir h -exzessiv, wenn sie exzessiv ist in bezug auf X_h , wenn also für jedes $x \in E$

$$(1.2) \quad E_h^x v(x_t) \uparrow v(x) \quad (t \downarrow 0)$$

gilt. Mit $\underline{S}_h$ bezeichnen wir die Menge der h -exzessiven Funktionen.

(1.3) Bemerkung Sei $v \in \underline{E}_+^*$. Ob v h -exzessiv ist oder nicht, hängt nur davon ab, welche Werte v auf E_h annimmt, denn stets gilt

$$E_h^x v(x_t) = v(x) e^{-t} \uparrow v(x) \quad (x \in E - E_h)$$

$$E_h^x v(x_t) = E_h^x l_{E_h} v(x_t) \quad (x \in E_h)$$

(nach I (3.5)). Mit anderen Worten: die Eigenschaft " h -exzessiv " ist eine Klasseneigenschaft bezüglich der Äquivalenzrelation

$$v \equiv_h v' : \Leftrightarrow v(x) = v'(x) \quad (x \in E_h)$$

auf $\underline{E}_+$.

(1.4) Definition Eine Funktion $v \in \underline{E}_+^*$ nennen wir h -harmonisch, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq E$

$$(1.5) \quad v(x) = E_h^x v(x_{D_{E-K}}) \quad (x \in E_h)$$

gilt. Mit H_h bezeichnen wir die Menge der h -harmonischen Funktionen.

(1.6) Bemerkung Wegen I (3.5) ist die so definierte Eigenschaft " h -harmonisch " eine $\equiv_h$ -Klasseneigenschaft auf $\underline{E}_+^*$.

Da X_h ein Standardprozess ist, ist jede h -harmonische Funktion auch h -exzessiv (vgl. den Beweis zu prop.3.4 in [45] unter Beachtung von (1.3)):

$$(1.7) \quad \underline{H}_h \subseteq \underline{S}_h \quad .$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen $\underline{S}$ bzw. $\underline{H}$ und $\underline{S}_h$ bzw. $\underline{H}_h$ untersuchen. Dazu setzen wir, für $u \in \underline{S}$,

$$\frac{u}{h}(x) := \begin{cases} \frac{u(x)}{h(x)} & (x \in E_h) \\ 0 & (x \in E - E_h) \end{cases} .$$

Die h-exzessiven Funktionen fallen dann gerade mit den Funktionen $\frac{u}{h}$ zusammen, und jede h-harmonische Funktion läßt sich in der Form $\frac{u}{h}$ mit $u \in \underline{H}$ darstellen (mod $\equiv$).
Genauer :

$$(1.8) \text{ Satz } 1) \quad u \in \underline{S} \Rightarrow \frac{u}{h} \in \underline{S}_h$$

2) Ist $h \in \underline{L}_0(m)$, so gibt es zu jedem $v \in \underline{S}_h$ ein $u \in \underline{S}$ mit

$$v \equiv_h \frac{u}{h} \quad ;$$

ist dabei $v \in \underline{H}_h$, so kann man $u \in \underline{H}$ wählen.

Anmerkung Man kann i.a. nicht erwarten, daß beim Übergang von u zu $\frac{u}{h}$ jede harmonische Funktion eine h-harmonische liefert. Man betrachte z.B. den Standardprozess der uniformen Bewegung nach rechts auf $E = (-\infty, \infty)$ und bilde den h-Prozess zu $h := 1_{(-\infty, 0)}$. Dann ist $u := 1 \in \underline{H}$, aber $\frac{u}{h} = 1_{(-\infty, 0)} \in \underline{H}_h$.

Beweis von (1.8)

1) Sei $u \in \underline{S}$ und $x \in E_h$. Wegen I (3.5) folgt

$$\begin{aligned}
 (1.9) \quad E_h^x \frac{u}{h}(x_t) &= E_h^x \left(\frac{u}{h}(x_t) ; x_t \in E_h \right) \\
 &= \frac{1}{h(x)} E^x(u(x_t) ; x_t \in E_h) \\
 &= \frac{1}{h(x)} E^x u(x_t) \\
 &= \frac{u}{h}(x) .
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $u(x(\cdot)(\omega))$ und $h(x(\cdot)(\omega))$ sind rechtsstetig auf $<0, \infty)$ (P^x) ([8] 4.19, 12.6), wegen $0 < h(x_0(\omega)) = h(x) < \infty$ (P^x) gilt also

$$\lim_{t \downarrow 0} u_{E_h}(x_t(\omega)) = u(x) \quad (P^x) ,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad \liminf_{t \downarrow 0} E_h^x \frac{u}{h}(x_t) &= \liminf_{t \downarrow 0} E_h^x \frac{u}{h} 1_{E_h}(x_t) \\
 &= \liminf_{t \downarrow 0} \frac{1}{h(x)} E^x u_{E_h}(x_t) \\
 &= \frac{1}{h(x)} E^x \liminf_{t \downarrow 0} u_{E_h}(x_t) \\
 &= \frac{u}{h}(x) .
 \end{aligned}$$

Wegen (1.9) und (1.10) erfüllt also die Funktion $\frac{u}{h}$ für jedes $x \in E_h$ die Bedingung (1.2), und nach (1.3) folgt $\frac{u}{h} \in \underline{S}_h$.

2) Sei $v \in \underline{S}_h$. Wir setzen

$$u(x) := \begin{cases} h(x)v(x) & (x \in E_h) \\ 0 & (x \in \{h=0\}) \\ \lim_{t \downarrow 0} \sup_{\{h < \infty\}} E^x u|_{(x_t)} & (x \in \{h=\infty\}) \end{cases}$$

Ist $x \in E_h$, so gilt

$$\begin{aligned} E^x u(x_t) &= E^x (u(x_t)) ; x_t \in \{h < \infty\}) \\ &= E^x (h(x_t)v(x_t)) ; x_t \in E_h \\ &= h(x) E_h^x (v(x_t)) ; x_t \in E_h \\ &= h(x) E_h^x v(x_t) \uparrow h(x)v(x) \end{aligned}$$

([8] 12.7, I (3.5)), also

$$(1.11) \quad E^x u(x_t) \uparrow u(x) \quad (t \downarrow 0) .$$

(1.11) ist auch für jedes $x \in \{h = 0\}$ erfüllt, denn für $t > 0$ folgt

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Rightarrow E^x h(x_t) = 0 \\ &\Rightarrow x_t(\omega) \in \{h = 0\} \quad (P^x) \\ &\Rightarrow u(x_t) = 0 \quad (P^x) . \end{aligned}$$

Sei nun $x \in \{h = \infty\}$. Da wir $h \in \underline{L}_0(m)$ angenommen haben, können wir I (1.6) anwenden. Damit folgt

$$(1.12) \quad E^x u(x_t) = E^x u_{\{h < \infty\}}(x_t) \quad (t > 0),$$

und da für $x \in \{h < \infty\}$ (1.11) gilt, folgt

$$\begin{aligned} E^x u(x_t) &= E^x(u(x_t); x_t \in \{h < \infty\}) \\ &\geq E^x(E^x u(x_s); x_t \in \{h < \infty\}) \\ &= E^x(u(x_{t+s}); x_t \in \{h < \infty\}) \\ &= E^x u(x_{t+s}) \quad (s, t > 0). \end{aligned}$$

Das impliziert (1.11) (man beachte (1.12) und die Definition von $u(x)$), und damit ist $u \in \underline{S}$ gezeigt.

Wir nehmen nun an, v sei h -harmonisch; wir wollen zeigen, daß dann u harmonisch ist. Sei also $K \subseteq E$ kompakt, $D := D_E - K$. D ist eine (F_{t+}^0) -Stopzeit, also ist $x_D: \omega \rightarrow x_{D(\omega)}(\omega)$ eine $F_{D+}^0 - E_{\Delta}$ -meßbare Abbildung von Ω nach E_{Δ} ([17] IV, T 49).

Wegen $\text{Restr}_{E_h} v \in \underline{E} \cap E_h$ (wir können an dieser Stelle bereits (1.13) verwenden) ist also $1_{E_h} v \in \underline{E}_{\Delta}$ und $1_{E_h} v(x_D) \in F_{D+}^0$. Wir können deshalb I (3.1) anwenden und erhalten (nach monotoner Approximation)

$$E_h^x v 1_{E_h}(x_D) = \frac{1}{h(x)} E^x h(x_D) v 1_{E_h}(x_D).$$

Damit folgt zunächst ähnlich wie oben

$$u(x) = E^x u(x_D) = P_{E-K} u(x) \quad (x \in \{h < \infty\}),$$

also $u = P_{E-K} u$ (m). Da auf jeder Seite eine exzessive Funktion steht, folgt $u = P_{E-K} u$ (nach

I (1.3)). Dies gilt für jede kompakte Menge in E ,
und damit ist $u \in \underline{H}$ gezeigt.

(1.13) Korollar Ist $h \in \underline{L}_0(m)$, so ist jede
h-exzessive Funktion borelsch auf E_h :

$$\text{Restr}_{E_h} v \in \underline{E} \cap E_h \quad (v \in \underline{S}_h)$$

Beweis: Ist $v \in \underline{S}_h$, so gibt es nach (1.8) ein
 $u \in \underline{S}$ mit $\text{Restr}_{E_h} v = \text{Restr}_{E_h} u$. Wegen $u, h \in \underline{S} \subset \underline{E}$
(vgl. I (1.7)) folgt die Behauptung.

§ 2 . Konvergenz entlang h-Pfaden

Die allgemeine Theorie der Standardprozesse liefert
für jeden h-Prozess mit $h \in \underline{S}$ die folgende Aus-
sage:

(2.1) Ist $v \in \underline{S}_h$, so gilt

$$P_h^x \left(\lim_{t \downarrow \xi} v(x_t) \text{ existiert} \right) = 1 \quad (x \in E)$$

([8] 12.8). Im folgenden wollen wir die Konvergenz
h-exzessiver Funktionen entlang h-Pfaden genauer
untersuchen, und zwar für den Fall, daß die h-Pfade
zum Martinrand führen.

Anmerkung " h-Pfade " bedeutet " Pfade (h-f.s.) " .

Wir wählen eine feste Folge $K_n \uparrow E$, setzen $D_n := D_{E-K_n}$ und definieren zu $v \in \underline{E}^*$ eine Funktion $[v]$ auf Ω durch

$$(2.2) \quad [v](\omega) := \limsup_n v(x_{D_n}(\omega))(\omega)$$

(2.3) Lemma Sei $v \in \underline{E}^*$. Für jedes $\eta \in E_1'$ ist dann $[v]$ η -f.s. konstant.

Beweis: Sei $\eta \in E_1'$, $I \subseteq \langle -\infty, \infty \rangle$ eine beliebige Borelmenge,

$$\Gamma_I := \{ [v] \in I \}.$$

Für jedes $n \geq 1$ ist D_n eine $(\underline{F}_{t+}^0)$ -Stopzeit, und wegen $v \in \underline{E}^*$ folgt, daß $v(x_{D_n})$ meßbar ist bezüglich der zum Standardprozess X_η gehörigen Vervollständigung von $\underline{F}^0$. Dies gilt dann auch für $[v]$, und somit ist durch

$$\eta_I(x) := P_\eta^x(\Gamma_I) \quad (x \in E)$$

eine Funktion $\eta_I \in \underline{E}^*$ definiert.

Ist $x \in E_\eta$, $K \subseteq E$ kompakt und $D := D_{E-K}$, so folgt zunächst $D < \mathfrak{S}(P_\eta^x)$ (nach I (3.7), angewandt auf den η -Prozess) und damit

$$\begin{aligned} E_\eta^x \eta_I(x_D) &= E_\eta^x (P_\eta^x(\Gamma_I) ; D < \mathfrak{S}) \\ &= E_\eta^x (1_{\Gamma_I} \circ \theta_D ; D < \mathfrak{S}) \\ &= E_\eta^x (1_{\Gamma_I} ; D < \mathfrak{S}) \end{aligned}$$

$$= \eta_I(x) \quad .$$

Also ist η_I η -harmonisch, und somit gibt es ein $u \in \underline{H}$ mit

$$u(x) = \eta_I(x) K(x, \eta) \quad (x \in E_\eta \cup \{K(., \eta) = 0\})$$

(vgl. den Beweis zu (1.8)). Wegen $\eta_I \leq 1$ folgt $u(x) \leq K(x, \eta) \quad (x \in \{K(., \eta) < \infty\})$, damit aber

$$u \leq K(., \eta)$$

(wegen $\bar{u} := u \wedge K(., \eta) \in \underline{S}$ und $\bar{u} = u$ (m) folgt nach I (1.3) $\bar{u} = u$). Da $K(., \eta)$ eine extremale harmonische Funktion ist, gibt es ein $\alpha_I \in \langle 0, 1 \rangle$ mit $u = \alpha_I K(., \eta)$, also

$$\eta_I(x) = \alpha_I \quad (x \in E_\eta) \quad .$$

Offenbar sind wir fertig, wenn wir $\alpha_I \in \{0, 1\}$ zeigen können. Sei also $x \in E_\eta$, $K \subseteq E$ kompakt, $D := D_{E-K}$. Wegen $D \in \mathcal{S}(P_\eta^x)$ und $x_D \in E_\eta(P_\eta^x)$ (nach I (3.5)) folgt

$$\begin{aligned} \alpha_I^2 &= \alpha_I P_\eta^x(\Gamma_I \cap \{D \in \mathcal{S}\}) \\ &= E_\eta^x(\eta_I(x_D) ; \Gamma_I \cap \{D \in \mathcal{S}\}) \\ &= E_\eta^x(1_{\Gamma_I^c \cap \Theta_D} ; \Gamma_I \cap \{D \in \mathcal{S}\}) \\ &= E_\eta^x(1_{\Gamma_I} ; \Gamma_I \cap \{D \in \mathcal{S}\}) = \alpha_I \end{aligned}$$

also $\alpha_I \in \{0, 1\}$.

Wir machen nun für den Rest dieses Kapitels die

Voraussetzung : $0 \neq h \in \underline{H} \cap \underline{I}(r)$

Es gibt dann ein endliches Maß μ_h auf $\underline{E}_M \cap \underline{E}_1'$ mit

$$(2.4) \quad h(.) = \int K(., \eta) \mu_h(d\eta) ,$$

und in der Martintopologie $\underline{T}_M$ auf $\underline{E}_M$ existiert

$$(2.5) \quad x_{\zeta_-} := \lim_{t \uparrow \zeta} x_t \in \underline{E}_1' \quad (h\text{-f.s.}) ,$$

d.h. die h-Pfade führen zum minimalen Teil des Martinrandes (vgl. I.3).

(2.6) Bemerkung Um die Konvergenz h-exzessiver Funktionen entlang h-Pfaden bei Start in $\underline{E}_h$ zu untersuchen, genügt es, die Funktionen $\frac{u}{h}$ ($u \in \underline{S}$) zu betrachten. Denn zu $v \in \underline{S}_h$ gibt es nach (1.8) und I (2.1) ein $u \in \underline{S}$ mit $\frac{u}{h} = v|_{\underline{E}_h}$, und nach I (3.5) folgt

$$(2.7) \quad \lim_{t \uparrow \zeta} v(x_t) = \lim_{t \uparrow \zeta} \frac{u}{h}(x_t) \quad (h\text{-f.s.}) .$$

(2.8) Bemerkung Wegen $1 \in \underline{S}$ ist $\frac{1}{h} \in \underline{S}_h$, für $x \in \underline{E}_h$ gilt also wegen $\underline{D}_n < \zeta$, $\underline{D}_n \uparrow \zeta$ (P_h^x) (vgl. (2.5)) und (2.1)

$$\begin{aligned} E_h^x \lim_{t \uparrow \zeta} \frac{1}{h}(x_t) &= E_h^x \lim_n \frac{1}{h}(x_{\underline{D}_n}) \\ &\leq \lim_n \inf E_h^x \frac{1}{h}(x_{\underline{D}_n}) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{h(x)} < \infty ,$$

und damit folgt

$$(2.9) \quad \lim_{t \uparrow \xi} h(x_t) > 0 \quad (\text{h-f.s.})$$

(2.10) Satz Sei $u \in \underline{S}$. Dann gilt:

- 1) Es gibt eine (mod μ_h eindeutig bestimmte) Funktion f_u auf E_1^i mit

$$(2.11) \quad \lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) = f_u(x_{\xi_-}) \quad (\text{h-f.s.})$$

- 2) Ist $u \in \underline{L}_0(m)$, so ist

$$(2.12) \quad f_u < \infty \quad (\mu_h)$$

- 3) Ist $u \in \underline{L}(r)$, so stimmt f_u mit der μ_h -Dichte von μ_u überein:

$$(2.13) \quad f_u = g_u \quad (\mu_h)$$

wenn $d\mu_u = g_u d\mu_h + d\nu$ mit $\nu \perp \mu_h$ und $g_u \in \underline{F}_M \cap \underline{L}(\mu_h)$ gilt.

Beweis: Zu $\frac{u}{h}$ bilden wir $[\frac{u}{h}]$ gemäß (2.2) und bezeichnen für jedes $\eta \in E_1^i$ mit $f_u(\eta)$ die zu $[\frac{u}{h}]$ und η gehörige Konstante aus (2.3). Damit ist eine nichtnegative Funktion f_u auf E_1^i erklärt.

1) Sei $x \in E_h$. Wegen (2.1) und I(3.10) gilt für μ_h -fastalle $\eta \in E_1'$:

$$x \in E_\eta, \quad P_\eta^x \left(\lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) \text{ existiert} \right) = 1.$$

Für jedes solche η gilt aber wegen I (3.7) (angewandt auf den η -Prozess)

$$\begin{aligned} (2.14) \quad P_\eta^x \left(\lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) = f_u(x_{\xi_-}) \right) \\ &= P_\eta^x \left(\left[\frac{u}{h} \right] = f_u(x_{\xi_-}) \right) \\ &= P_\eta^x \left(\left[\frac{u}{h} \right] = f_u(\eta) \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

und damit folgt nach I (3.9)

$$\begin{aligned} P_h^x \left(\lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) = f_u(x_{\xi_-}) \right) \\ &= \frac{1}{h(x)} \int K(x, \eta) P_\eta^x \left(\lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) = f_u(x_{\xi_-}) \right) \mu_h(d\eta) \\ &= \frac{1}{h(x)} \int K(x, \eta) \mu_h(d\eta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist (2.11) gezeigt. Wegen (2.14) ist f_u durch (2.11) mod μ_h eindeutig bestimmt.

2) Ist $u \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$, so gibt es ein $x \in E_h \cap \{u < \infty\}$ (sonst wäre $\{h \neq 0\}$ in der m -Nullmenge $\{h = \infty\} \cup \{u = \infty\}$ enthalten, also leer nach I (1.3); wir haben aber $h \neq 0$ vorausgesetzt). Für ein solches x gilt wegen (2.11) und (2.5)

$$\begin{aligned} E_h^x f_u(x_{\zeta_-}) &= E_h^x \lim_{t \uparrow \zeta} \frac{u}{h}(x_t) \\ &= E_h^x \lim_n \frac{u}{h}(x_{D_n}) \\ &\leq \liminf_n E_h^x \frac{u}{h}(x_{D_n}) \\ &\leq \frac{u}{h}(x) \end{aligned} ,$$

also $f_u(x_{\zeta_-}) < \infty$ (P_h^x). Wegen I (3.10) folgt (2.12).

3) Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} (2.15) \quad u(.) &= \int K(., \eta) \nu(d\eta) \\ &+ \int K(., \eta) g_u(\eta) \mu_h(d\eta) \end{aligned} .$$

Wir wollen zeigen:

$$(2.16) \quad \lim_{t \uparrow \zeta} \frac{u}{h}(x_t) = g_u(x_{\zeta_-}) \quad (h\text{-f.s.})$$

a) Wir setzen $\bar{u} := \int K(., \eta) \nu(d\eta)$. Dann ist $\bar{u} \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$, also auch $\bar{u} \wedge h$. Ist

$$\bar{u} \wedge h = \int K(., \eta) \bar{v}(d\eta) + p$$

die zugehörige Riesz-Zerlegung (man beachte I (2.4)), so folgt $\bar{v} \leq v$, $\bar{v} \leq \mu_h$, also $\bar{v} = 0$ wegen $v \perp \mu_h$, d.h. $\bar{u} \wedge h$ ist ein Potential. Für jedes Potential p gilt aber wegen (2.1), (2.5) und I (3.1) (vgl. den letzten Teil des Beweises von (1.8))

$$\begin{aligned} E_h^x \lim_t \frac{p}{h}(x_t) &= E_h^x \lim_n \frac{p}{h}(x_{D_n}) \\ &\leq \lim_n \inf E_h^x \frac{p}{h}(x_{D_n}) \\ &= \frac{1}{h(x)} \lim_n \inf E^x p(x_{D_n}) \\ &= 0 \quad (x \in E_h) \end{aligned}$$

(zunächst nur für m -fastalle $x \in E_h$, damit aber für alle wegen $E_h^{(\cdot)} \lim_t \frac{p}{h}(x_t) \in \underline{S}_h$, (1.8) und I (1.3)). Daraus folgt wegen (2.9)

$$(2.17) \quad \lim_t \frac{\bar{u}}{h}(x_t) = 0 \quad (h\text{-f.s.})$$

b) Wir setzen

$$\Gamma := \{ \exists x_{e_-} = \lim x_t \in E_1^i, \cdot D_{E-E_h} = \infty \}$$

$\underline{G} := \underline{F}^0 \cap \Gamma$, $\underline{G}_n := \underline{F}_{D_n}^0 \cap \Gamma$ ($n = 1, 2, \dots$) und bezeichnen mit $\underline{G}_\infty$ den von den $\underline{G}_n$ erzeugten σ -Körper

auf Ω . Dann ist x_{D_n} eine meßbare Abbildung von $(\Gamma, \underline{G}_n)$ nach $(E, \underline{E})$ ($n = 1, 2, \dots$), und x_{ξ_-} ist eine meßbare Abbildung von $(\Gamma, \underline{G}_\infty)$ nach $(E_M, \underline{E}_M)$ (denn für jedes $U \in \underline{T}_M$ mit $U = \bigcup_k F_k$, $F_k \in \underline{T}_M$, $\bar{F}_k \subseteq U$ gilt

$$\{x_{\xi_-} \in U\} = \bigcup_k \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{x_{D_n} \in F_k \cap E\} \in \underline{G}_\infty),$$

also

$$g_u(x_{\xi_-}) \in \underline{G}_\infty.$$

Sei nun $x \in E_h \cap \{u < \infty\}$. Dann ist $P_h^x(\Gamma) = 1$.

In der folgenden Betrachtung legen wir das Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Gamma, \underline{G}, P_h^x)$ zugrunde.

Zunächst ist $g_u(x_{\xi_-})$ P_h^x -integrierbar :

$$\begin{aligned} E_h^x g_u(x_{\xi_-}) &= \frac{1}{h(x)} \int K(x, \eta) E_\eta^x g_u(x_{\xi_-}) \mu_h(d\eta) \\ &= \frac{1}{h(x)} \int K(x, \eta) g_u(\eta) \mu_h(d\eta) \\ &\leq \frac{1}{h(x)} u(x) \end{aligned}$$

(nach I (3.7) und (2.15)). Setzen wir

$$\varphi_n := E_h^{x_{D_n}} g_u(x_{\xi_-}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

so ist $\varphi_n \in \underline{G}_n$, und für jedes $\Lambda \in \underline{G}_n$ gilt

$$\begin{aligned} E_h^x (g_u(x_{\xi_-}); \Lambda) &= E_h^x (g_u(x_{\xi_-} \circ \theta_{D_n}); \Lambda) \\ &= E_h^x (\varphi_n; \Lambda) \end{aligned}$$

Also ist (φ_n) eine Version des durch $g_u(x_{\xi_-})$ erzeugten Martingals in bezug auf das System $(\underline{G}_n)$, und nach einem bekannten Martingalsatz (vgl. [17] V, T 18) folgt

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{1}{h(x_{D_n})} \int K(x_{D_n}, \eta) g_u(\eta) \mu_h(d\eta) \\ &\rightarrow g_u(x_{\xi_-}) \quad (P_h^x) \end{aligned}$$

(man beachte I (3.7)). Zusammen mit (2.17) bedeutet das wegen (2.15)

$$(2.18) \quad \lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) = g_u(x_{\xi_-}) \quad (P_h^x)$$

für jedes $x \in E_h \cap \{u < \infty\}$. Wegen

$$v(\cdot) := P_h^{(\cdot)} \left(\lim_{t \uparrow \xi} \frac{u}{h}(x_t) \neq g_u(x_{\xi_-}) \right) \in \underline{S}_h$$

mit $\{v \neq 0\} \cap E_h \subseteq \{u = \infty\}$ gibt es ein $u_0 \in \underline{S}$ mit $\frac{u}{h}_0(x) = v(x)$ ($x \in E_h$) und $\{u_0 \neq 0\} \subseteq \{h = \infty\} \cup \{u = \infty\}$ (vgl. den Beweis zu (1.8)), und nach I (1.3) folgt $u_0 = 0$. (2.18) gilt somit für jedes $x \in E_h$, und das war die Behauptung.

§ 3 . Feine Konvergenz

Wir wollen nun die Konvergenz h-exzessiver Funktionen entlang h-Pfaden topologisch interpretieren, und zwar als Konvergenz in der feinen Topologie. Dazu müssen wir die η -dünnen Mengen aus II.2 noch etwas genauer beschreiben.

Sei also $\eta \in E'_1$. Wir wählen eine Folge von Umgebungen $V_n \in \underline{V}_M(\eta) \cap \underline{T}_M$ mit $V_n \downarrow \{\eta\}$ und definieren zu $A \in \underline{E}$ durch

$$(3.1) \quad \eta_A(x) := P_\eta^x \cap \{D_{A \cap V_n} < \xi\} \quad (x \in E)$$

eine Funktion $\eta_A \in \underline{E}^*$; diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der V_n .

(3.2) Bemerkung Ist $x \in E - E_\eta$, so ist $D_{A \cap V_n} = \infty (P_\eta^x)$ für genügend großes n . Also gilt

$$(3.3) \quad \eta_A(x) = 0 \quad (x \in E - E_\eta)$$

(3.4) Bemerkung Für jedes $x \in E$ gilt

$$(3.5) \quad \eta_A(x) = P_\eta^x \cap \{D_A \circ \theta_{D_{V_n}} + D_{V_n} < \xi\}$$

Denn

$$\bigcap_n \{D_A \circ \theta_{D_{V_n}} + D_{V_n} < \xi\} = \bigcap_n \{D_{A \cap V_n} < \xi\} + \bigcup_n \Sigma_n$$

mit

$$\Sigma_n = \{D_{A \cap V_n} = \infty\} \cap \bigcap_{m \geq n} \{D_{A \cap V_n^c} \circ \theta_{D_{V_m} + D_{V_m}} < \infty\}$$

und für jedes $\omega \in \Sigma_n$ hat $x_t(\omega)$ für $t \uparrow \infty(\omega)$ einen Häufungspunkt in $E_M - V_n$; für $x \in E_\eta$ folgt also nach I (3.7) $P_\eta^x(\Sigma_n) = 0$ ($n \geq 1$) und damit (3.5). Für $x \in E - E_\eta$ schließt man wie in (3.2).

$$(3.6) \text{ Lemma } \quad \eta_A \neq 0 \implies \eta_A(x) = 1 \quad (x \in E_\eta)$$

Beweis: Zunächst folgt wie im Beweis zu (2.3), daß es ein $\alpha \in (0,1)$ mit

$$\eta_A(x) = \alpha \quad (x \in E_\eta)$$

gibt (man beachte (3.5)). Nach (3.3) genügt es, $\alpha \in \{0,1\}$ zu zeigen. Sei also $x \in E_\eta$, $K \subseteq E$ kompakt, $D := D_{E-K}$ und $\Lambda := \bigcap_n \{D_{A \cap V_n} < \infty\}$. Für $n \geq 1$ setzen wir $D_n := D_{A \cap V_n} \vee D$ (das ist eine Stopzeit in bezug auf den η -Prozess). Wegen $D < \infty$ (P_η^x) und I (3.5) folgt

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha P_\eta^x(\Lambda) \\ &= \alpha \lim_n P_\eta^x(D_{A \cap V_n} < \infty) \\ &= \lim_n E_\eta^x(\eta_A(x_{D_n}); D_n < \infty) \\ &= \lim_n E^x(1_\Lambda \circ \theta_{D_n}; D_n < \infty) \\ &= P_\eta^x(\Lambda) = \alpha. \end{aligned}$$

(3.7) Satz $\eta_A = 0 \iff A \text{ } \eta\text{-dünn}$

Beweis: " $\Leftarrow$ " ist klar wegen $P_\eta^x(D_A < \mathbb{S}) \geq \eta_A(x)$ und (3.6). Ist umgekehrt $\eta_A(x) = 0$ für ein $x \in E_\eta$ (man beachte (3.3)), so gibt es nach (3.5) ein $n \geq 1$ mit

$$\begin{aligned} 1 &> P_\eta^x(D_A \circ \Theta_{D_{V_n}} + D_{V_n} < \mathbb{S}) \\ &= P_\eta^x P_\eta^{x_{D_{V_n}}}(D_A < \mathbb{S}) \end{aligned} ,$$

also ein $y \in E_\eta$ mit $P_\eta^y(D_A < \mathbb{S}) \neq 1$ (man beachte I (3.5)), und das bedeutet, daß A η -dünn ist.

(3.8) Korollar

$$A \text{ } \eta\text{-dünn} \iff \inf_{V \in \underline{V}_M(\eta)} P_{A \cap V} K(., \eta) = 0$$

Beweis: Ist n genügend groß, so ist $D_{A \cap V_n} = T_{A \cap V_n}$ (P_η^x) für jedes $x \in E$. Ist $x \in E - E_\eta$, so ist $P_{A \cap V} K(., \eta) = 0$ für jedes V mit $x \notin V$. Mit I (3.4) kann man also schließen:

$$\begin{aligned} \inf_V P_{A \cap V} K(., \eta) = 0 &\iff P_{A \cap V_n} K(., \eta) \downarrow 0 \\ &\iff \bar{P}_{A \cap V_n} K(., \eta) \downarrow 0 \\ &\iff P_\eta^x(D_{A \cap V_n} < \mathbb{S}) \downarrow 0 \quad (x \in E_\eta) \\ &\iff \eta_A(x) = 0 \quad (x \in E_\eta) \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nach (3.3) und (3.7) gleichbedeutend damit, daß A η -dünn ist.

Wir sind nun in der Lage, den Zusammenhang zwischen feiner Konvergenz und der Konvergenz entlang η -Pfadern herzustellen :

(3.9) Satz Sei $\eta \in \mathbb{E}_1^+$, sei $A \in \mathbb{E}$ nicht dünn in η , und sei $v \in \mathbb{E} \cap A$. Dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{E}_\eta$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lambda \text{ ist feiner Häufungswert von } v \text{ in } \eta \\ \Leftrightarrow & \lambda \text{ ist Häufungspunkt von } v(x_t) \text{ für } t \uparrow \mathbb{S} \quad (P_\eta^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \lambda \text{ ist feiner Limes von } v \text{ in } \eta \\ \Leftrightarrow & \lambda = \lim_{t \uparrow \mathbb{S}} v(x_t) \quad (P_\eta^x) \end{aligned}$$

Anmerkung " feiner Häufungswert (Limes) in η " bedeutet " Häufungswert (Limes) entlang $\mathbb{V}_K(\eta) \cap A$ " (vgl. I.4). Wir erinnern daran, daß für eine Menge $A \subseteq \mathbb{E}$ stets $\mathbb{V}_K(\eta) \cap A = \mathbb{F}(\eta) \cap A$ gilt (vgl. II.2).

Beweis: Offenbar genügt es, 1) zu zeigen. Sei $\lambda \in \langle -\infty, \infty \rangle$. Wir wählen eine Basis (U_k) von offenen Umgebungen von λ und setzen

$$A_k := \{x \in A \mid v(x) \in U_k\} \in \mathbb{E} \quad (k \geq 1).$$

Ist (V_n) die Umgebungsbasis von η aus (3.1),
so gilt $D_{V_n} \uparrow \Sigma (P_\eta^x)$ wegen $x \in E_\eta$ und I (3.7).
Die zweite Aussage in 1) ist dann äquivalent mit

$$\begin{aligned} P_\eta^x \bigcap_k \bigcap_n \{D_{V_n \cap A_k} < \Sigma\} &= 1 \\ \Leftrightarrow P_\eta^x \bigcap_n \{D_{V_n \cap A_k} < \Sigma\} &= 1 \quad (k \geq 1) \\ \Leftrightarrow \eta_{A_k}(x) &= 1 \quad (k \geq 1) \\ \Leftrightarrow A_k \text{ ist nicht dünn in } \eta &\quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

(nach (3.7) und III(2.2)), und das ist gleichbedeutend
mit der ersten Aussage.

Wenden wir (3.9) auf (2.10) an, so erhalten wir die
folgende Verallgemeinerung des Satzes von Fatou-Doob-
Naim (vgl. [6], [7], [19]) :

(3.10) Korollar (Fatou I)

- 1) Eine h -exzessive Funktion hat in μ_h -fastallen
Punkten des Martinrandes einen feinen Limes.
- 2) Ist $u \in \underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$, so ist der feine Limes von
 $\frac{u}{h}$ in μ_h -fastallen Punkten endlich.

- 3) Ist $u \in \underline{S} \cap \underline{L}(r)$, so stimmt der feine Limes von $\frac{u}{h}$ in μ_h -fastallen Punkten mit der μ_h -Dichte von μ_u überein.

(3.11) Bemerkung Im klassischen Fall besteht $\underline{S} \cap \underline{L}_0(m)$ gerade aus den superharmonischen Funktionen ≥ 0 .

(3.12) Bemerkung Jede exzessive Funktion ist $\underline{T}_0$ -stetig. Wegen $\underline{T}_0 = \underline{T}_N \cap E$ ist $E_h \in \underline{T}_N$, und jede h -exzessive Funktion ist $\underline{T}_N$ -stetig auf E_h (nach (1.8)). Wie der Beweis zeigt, kann man deshalb die erste Aussage aus (3.10) auch so formulieren:

- 1') Zu jedem $v \in \underline{S}_h$ gibt es ein $F \in \underline{E}_M \cap E_1^i$ mit $\mu_h(E_M - F) = 0$ derart, daß gilt:

- a) $F \subseteq \partial_N E_h$
- b) v läßt sich zu einer $\underline{T}_N$ -stetigen Funktion auf $E_h \cup F$ fortsetzen.

Beweis von (3.10)

Sei $v \in \underline{S}_h$ und $x \in E_h$. Nach (2.10), (2.6), I (3.5), I (3.10) gilt für μ_h -fastalle $\eta \in E_1^i$:

- a) $x \in E_\eta$
- b) $P_\eta^x (D_E - E_h < \infty) = 0$
- c) $P_\eta^x \left(\lim_{t \uparrow \infty} v(x_t) = \lambda(\eta) \right) = 1$

Zum Beweis der ersten Aussage genügt es also, die Einschränkung von v auf E_h zu betrachten, denn für jedes η mit b) ist

$$E_h \in \underline{V}_N(\eta) \cap E = \underline{V}_K(\eta) \cap E$$

(vgl. III (2.2)). Nach (1.13) ist $\text{Restr}_{E_h} v \in \underline{E} \cap E_h$, wir können also für μ_h -fastalle $\eta \in E'_1$ (3.9) anwenden und erhalten wegen a) und c) :

$$\exists \quad \lim_{\underline{V}_K(\eta) \cap E} v = \lim_{\underline{V}_K(\eta) \cap E_h} v \quad (\mu_h)$$

Aus (2.12) und (2.13) folgt 2) und 3).

§ 4 . Konvergenz in der Martintopologie

Wir werden nun die Konvergenzaussagen aus § 3 verschärfen, indem wir "feiner Limes (Häufungspunkt) in η " durch "Limes entlang $\underline{V}_M(\eta)$ außerhalb einer in η dünnen (auf einer in η nicht dünnen) Menge" ersetzen.

Sei $\eta \in E'_1$, $A \subseteq E$.

Bemerkung Wir erinnern an die Begriffe "sehr dünn" und "dick" aus der allgemeinen Theorie der feinen Topologie (vgl. I.4); wir verwenden sie hier in bezug auf die feine Topologie $\underline{T}_K$.

(4.1) Lemma A dünn in $\eta \Rightarrow A$ sehr dünn in η

Beweis: Sei A dünn in η ; dabei können wir nach III (1.4) annehmen, daß A offen ist. Wir haben zu zeigen (vgl. I (4.4)):

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein Maß μ auf $\underline{E}$ und ein $G \in \underline{V}_M(\eta)$ derart, daß gilt:

$$\mu K(y) \geq 1 \quad (y \in A \cap G), \quad \mu K(\eta) < \varepsilon$$

Sei also $\varepsilon > 0$, und sei $x \in E_\eta$. $K(x, \cdot)$ ist unterhalbstetig auf E_M , es gibt also ein $\alpha > 0$ und ein $V \in \underline{V}_M(\eta)$ mit

$$K(x, y) \geq \alpha \quad (y \in V),$$

ferner gibt es nach (3.8) ein $G \in \underline{V}_M(\eta) \cap \underline{T}_M$ mit $G \subseteq V$ und

$$P_{A \cap G} K(\cdot, \eta)(x) < \varepsilon \alpha$$

Setzen wir nun $\mu(\cdot) := \alpha^{-1} P_{A \cap G}(x, \cdot)$, so gilt für jedes $y \in A \cap G$

$$\begin{aligned} \mu K(y) &= \alpha^{-1} P_{A \cap G} K(\cdot, y)(x) \\ &= \alpha^{-1} rU(y)^{-1} \int_{P_{A \cap G}(x, dz)} U(z, y) \\ &= \alpha^{-1} rU(y)^{-1} \int U(x, z) \hat{P}_{A \cap G}(dz, y) \\ &= \alpha^{-1} rU(y)^{-1} U(x, y) \end{aligned}$$

$$= \alpha^{-1} K(x, y) \geq 1$$

(zur dritten Gleichung wurde III (2.5) benutzt, zur vierten, daß $A \cap G$ offen ist), außerdem ist

$$\mu K(\eta) = \alpha^{-1} P_{A \cap G} K(., \eta)(x) < \varepsilon,$$

und das war zu zeigen.

(4.2) Lemma A nicht dünn in $\eta \Rightarrow A$ dick in η

Beweis: Angenommen, A sei nicht dick in η . Es gibt dann ein $V_0 \in \underline{V}_M(\eta)$ und ein $\alpha < 1$ derart, daß für $B := A \cap V_0$

$$\mu_{B \cap V^c}(\eta) \leq \alpha \quad (V \in \underline{V}_M(\eta))$$

gilt (vgl. I (4.5)). Ist also $V_n \in \underline{V}_M(\eta) \cap \underline{T}_M$ ($n \geq 1$) mit $V_n \downarrow \{\eta\}$, so gibt es zu jedem $n \geq 1$ ein Maß μ_n auf $\underline{E}$ mit

$$\mu_n K(y) \geq 1 \quad (y \in B \cap V_n^c), \quad \mu_n K(\eta) \leq \alpha$$

Wir setzen $C := \bigcap_n \{\mu_n K \geq 1\} \cup V_n$. Dann gilt

$$B \subseteq C \in \underline{E}, \quad \mu_n K(y) \geq 1 \quad (y \in C \cap V_n^c),$$

und wie im ersten Teil des Beweises von III (2.3) folgt

$$\int r(dx) P_{C \cap V_n^c} K(., \eta)(x) \leq \mu_n^K(\eta) \leq \alpha \quad (n \geq 1).$$

Wegen $\lim T_{C \cap V_n^c} = T_C$ (f.s.) folgt

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \liminf_n \int r(dx) P_{C \cap V_n^c} K(., \eta)(x) \\ &\geq \int r(dx) E^x \liminf_n K(x_{T_{C \cap V_n^c}}, \eta) \\ &= \int r(dx) E^x K(x_{T_C}, \eta) \\ &= \int r(dx) P_C K(., \eta)(x) \end{aligned} ,$$

also

$$\int r(dx) P_C K(., \eta)(x) \leq \alpha < 1 = \int r(dx) K(x, \eta) ,$$

und damit $P_C K(., \eta) \neq K(., \eta)$, d.h. C ist dünn in η (nach II (2.3) und III (2.3)). Wegen $A \subseteq C \cup V_0^c$ ist dann aber auch A dünn in η . Damit ist (4.2) gezeigt.

Wegen (4.1) und (4.2) können wir auf die Situation in (3.9) den Konvergenzssatz von Doob-Brelot (vgl. I (4.6)) anwenden und erhalten sofort:

(4.3) Satz Sei $\eta \in E_1^+$, sei $A \in \underline{E}$ nicht dünn in η , und sei $v \in \underline{E} \cap A$. Dann gilt für beliebiges $x \in E_\eta$:

1) λ ist Häufungspunkt von $v(x_t)$ für $t \uparrow \infty$ (P_η^x)

$\Leftrightarrow$ auf einer passenden Menge $A_0 \subseteq A$, die in η dick ist, konvergiert v gegen λ entlang $\underline{V}_M(\eta)$:

$$\lambda = \lim_{\substack{\underline{V}_M(\eta) \\ \cap A_0}} v$$

2) λ ist Limes von $v(x_t)$ für $t \uparrow \infty$ (P_η^x)

$\Leftrightarrow$ außerhalb einer passenden Menge $A_1 \subseteq A$, die in η dünn ist, konvergiert v gegen λ entlang $\underline{V}_M(\eta)$:

$$\lambda = \lim_{\substack{\underline{V}_M(\eta) \\ \cap (A-A_1)}} v$$

Bemerkung Natürlich kann man (4.3) auch direkt im Anschluß an (3.9) beweisen, ohne die Interpretation der η -dünnen Mengen mittels der feinen Topologie $T_{\mathbb{K}}$ zu verwenden (man ersetze zunächst " dick in η " durch " nicht η -dünn " und " dünn in η " durch " η -dünn "). Bei 2) ist das leicht zu sehen: aus (3.8) folgt nämlich, daß man zu einer Folge η -dünner Mengen A_n eine Folge von Umgebungen $V_n \in \underline{V}_M(\eta)$ so konstruieren kann, daß die Menge $\bigcup_n (A_n \cap V_n)$ η -dünn ist.

(4.4) Korollar (Fatou II) Sei $v \in \underline{S}_h$. Dann gibt es zu jedem minimalen Randpunkt η eine in η dünne Menge $A(\eta)$ derart, daß gilt:

$$\exists \lim_{\substack{\rightarrow \\ M}} (\eta) \cap (E - A(\eta)) \quad \forall \quad (\mu_h)$$

Beweis: (4.4) folgt aus (4.3) wie (3.10) aus (3.9)

Anmerkung (4.4) ist eine direkte Verallgemeinerung des Satzes von P. Fatou für die beschränkten harmonischen Funktionen auf dem Einheitskreis ([9] p.363). Sei nämlich $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$, m das Lebesguemaß auf E , $X = \hat{X}$ der Brownprozess auf E , r z.B. das Lebesguemaß auf dem Rand einer kleinen Kreisscheibe um 0 und $h = 1$. Dann ist $E' = E'_1$ der euklidische Rand von E und μ_h das Lebesguemaß auf E' . Ist nun u eine beschränkte harmonische Funktion auf E , so ist $u' := u + \sup \{|u(x)| \mid x \in E\} \in \underline{H} \cap \underline{L}_0(m)$. (4.4) liefert also die folgende Aussage:

Für fastalle $\eta \in E'$ gilt:

(4.5) u hat in η einen Limes außerhalb einer passenden Menge $A(\eta)$, die in η dünn ist.

Ersetzt man dabei (4.5) durch

(4.6) u hat in η einen nicht-tangentiellen Limes

so ist das gerade der Satz von P. Fatou in [9]. Brelot und Doob haben aber in [6] gezeigt, daß (4.6) äquivalent ist mit

(4.7) u hat in η einen Limes außerhalb einer passenden Menge $A'(\eta)$, die in η halb-dünn ist

und das ist schwächer als (4.5). (Zur Definition von "nicht-tangentieller Limes (limite angulaire)" und "halb-dünn (semi-effilé)" vgl. [6]).

LITERATUR

- [1] H.BAUER : Markoffsche Prozesse, Vorlesungsausarbeitung, Hamburg (1964)
- [2] H.BAUER : Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie
Lecture Notes in Mathematics 22, Springer (1966)
- [3] R.M.BLUMENTHAL, R.K.GETOOR : Markov Processes and
Potential Theory, Academic Press (erscheint demnächst)
- [4] M.BRELOT : Introduction axiomatique de l'effilement
Annali di Matematica, Ser.IV, 57 (1962), 77-96
- [5] M.BRELOT : Topologies et frontières en théorie du Potentiel, Cours multigraphié, Paris (1964)
- [6] M.BRELOT, J.L.DOOB : Limites angulaires et limites fines, Ann.Inst.Fourier, 13.2 (1963), 395-415
- [7] J.L.DOOB : Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, Bull.Soc.math.France 85 (1957), 431-458
- [8] E.B.DYNKIN : Markov Processes I,II, Springer (1965)
- [9] P.FATOU : Séries trigonométriques et séries de Taylor
Acta math. 30 (1906), 335-400.
- [10] H.FÖLLMER : Integraldarstellung von Martin für Hunt-Prozesse mit Coprozess, Diplomarbeit, Erlangen (1967)
- [11] B.H.GOLDSTEIN : Potentialtheorie Markoffscher Prozesse
Diplomarbeit, Göttingen (1965)
- [12] K.GOWRISANKARAN : Extreme harmonic functions and boundary value problems, Ann.Inst.Fourier, 13.2 (1963), 307-356
- [13] G.A.HUNT : Markoff processes and potentials I,II,III
Illinois J.Math.vol.1 (1957), 44-93, 316-369, vol.2 (1958), 151-213
- [14] H.KUNITA, T.WATANABE : Notes on transformations of Markov processes connected with multiplicative functionals, Mem.Fac.Sci.Kyushu Univ. Ser.A, vol.17 (1963) 181-191
- [15] H.KUNITA, T.WATANABE, : Markov processes and Martin boundaries I, Illinois J.Math. 9 (1965), 485-526

- [16] P.A.MEYER : Processus de Markov, Lecture Notes in Mathematics 26, Springer (1967)
- [17] P.A.MEYER : Probabilités et potentiel, Hermann (1966)
- [18] L.NAIM : Sur le rôle de la frontière de R.S.Martin dans la théorie du potentiel, Ann.Inst.Fourier 7 (1957) 183-285
- [19] L.LUMER-NAIM : Sur le Théorème de Fatou généralisé Ann.Inst.Fourier 12 (1962), 623-626
- [20] T.WATANABE : A remark on the strong Markov property Mem.Fac.Sci.Kyushu Univ.Ser.A, 17 (1963), 176-180

LEBENS LAUF

Geboren am 20.5.1941 in Heiligenstadt (Thüringen) als Sohn des -Versicherungsmathematikers Bert Föllmer und seiner Ehefrau Lotte, geb. Ladwig. Von 1947 bis 1951 Besuch der Volksschule in Berlin-Wilmersdorf, Uder (Thüringen) und Bonn. Von 1951 bis 1958 am Beethoven-Gymnasium in Bonn, von 1958 bis 1960 am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium in Köln, jeweils am neu-sprachlichen Zweig. Nach der Reifeprüfung am 6.3.1960 zunächst Studium der Philosophie, Romanistik und Mathematik, davon 2 Semester in Köln und 1 Semester in Göttingen. Danach Studium der Mathematik und Physik, davon 8 Semester in Göttingen, 2 Semester in Paris und 2 Semester in Erlangen. Seit dem Diplomvorexamen in Mathematik am 5.11.1963 Schüler von Herrn Professor Konrad Jacobs. Außerdem Vorlesungen bei den Professoren M.Brelot, L.Schwartz und R.M.Blumenthal. Diplom-Hauptprüfung für Mathematik am 5.6.1967 in Erlangen. Ab April 1967 wissenschaftliche Hilfskraft, seit August 1967 wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Professor Jacobs an einer Forschungsarbeit zur Potentialtheorie Markoffscher Prozesse, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert wird. Seit Juli 1967 verheiratet mit Malena Föllmer, geb. Hartwigk.

Erlangen, Dezember 1967

Offsetdruck - Fotodruck

Josef Hogl

8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz,) Tel. 22990

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 2 29 90
